2.2 図解化

§1. 斜交座標

前回のLorentz変換を図解化しよう。古典力学のように時間tを軸とすると光速はほとんど x 軸になってしまうので、縦軸として $w = ct$ [m] をとることとする。

さらに、$\beta = \dfrac{V}{c}$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とすると、

$$
\begin{cases}
w' = \gamma w - \beta\gamma x \\
x' = -\beta\gamma w + \gamma x
\end{cases}
$$

と書くことができる。

プリント $\boxed{1}$

光速不変の原理から、

$$-w^2 + x^2 = -w'^2 + x'^2$$

なので、斜交軸の目盛をとろう。

番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.5 斜交座標

1. 前回の Lorentz 変換を，$w = ct$，$\beta = \frac{V}{c}$，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ として書きなおすと，

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．グラフ上に $w-x$ 軸を直交座標にとり，$V = \frac{c}{2}$ のとき w' 軸，x' 軸を書き入れよう．Lorentz 変換の式 (1) において

(a) $w' = 0$ とおいて x' 軸の方程式を求め，x' 軸を書き込みなさい．

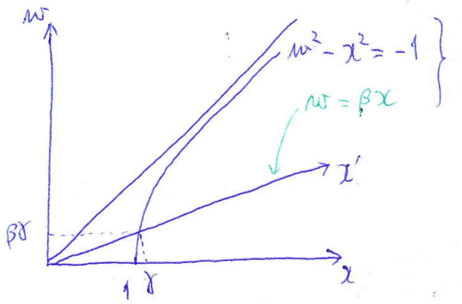
$w' = 0 = \gamma w - \beta\gamma x$ より $w = \beta x = \frac{1}{2}x$

(b) $x' = 0$ とおいて w' 軸の方程式を求め，w' 軸を書き込みなさい．

$x' = 0 = -\beta\gamma w + \gamma x$ より $w = \frac{1}{\beta}x = 2x$

2. 斜交軸の目盛り

(a) 斜交軸 x' と双曲線 $w^2 - x^2 = -1$ の交点の座標と，原点から交点までの長さ α_r を β で書き表しなさい．これが斜交軸 x' の 1 である．



$\left.\begin{matrix} w^2 - x^2 = -1 \\ w = \beta x \end{matrix}\right\}$ $\beta^2 x^2 - x^2 = -1$

$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$

$w^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$

$\therefore w = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma$

したがって，原点から交点までの距離 α_r は，

$\alpha_r = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}$

$= \sqrt{\gamma^2(1+\beta^2)}$

$= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$

(b) 斜交軸 w' と双曲線 $w^2 - x^2 = +1$ の交点の座標と，原点から交点までの長さ α_r を β で書き表しなさい．これが斜交軸 w' の 1 である．

同様にして，

$\left.\begin{matrix} w^2 - x^2 = 1 \\ w = \frac{1}{\beta}x \end{matrix}\right\}$ $\frac{x^2}{\beta^2} - x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} - 1} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$

$\therefore x = \beta\gamma$

よって

$w = \frac{1}{\beta}x = \gamma$

したがって原点から交点までの距離 α_r は，

$\alpha_r = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}$

$= \sqrt{\gamma^2(1+\beta^2)}$

$= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$

3. $V = \frac{c}{2}$ のとき $\beta = 0.5$ である．

(a) γ の値を求めなさい．

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \fallingdotseq 1.15$$

(b) $\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ の値を求めなさい．

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{1+0.25}{1-0.25}} = \sqrt{\frac{1.25}{0.75}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \fallingdotseq 1.29$$

4. 斜交座標の目盛を書きこみなさい．ただし，各目盛は，$\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ 倍になっている．

5. **時空面積保存則** (特殊相対論 No.1 **5.** 参照)

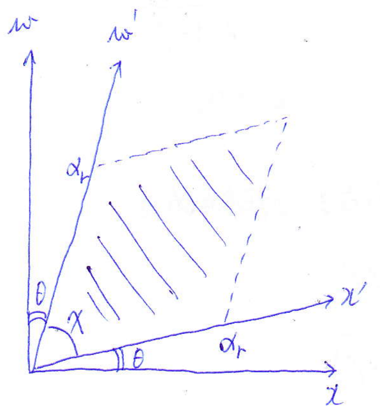
(a) 直交座標と斜交座標との交わる角度を θ とすると，$\tan\theta = \beta$ となる．$\cos\theta$，$\sin\theta$ を β を用いて表しなさい．

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\beta^2}{1+\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

(b) 長さが $\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ で，角 $\chi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ で交わる平行四辺形の面積が 1 となることを示しなさい．



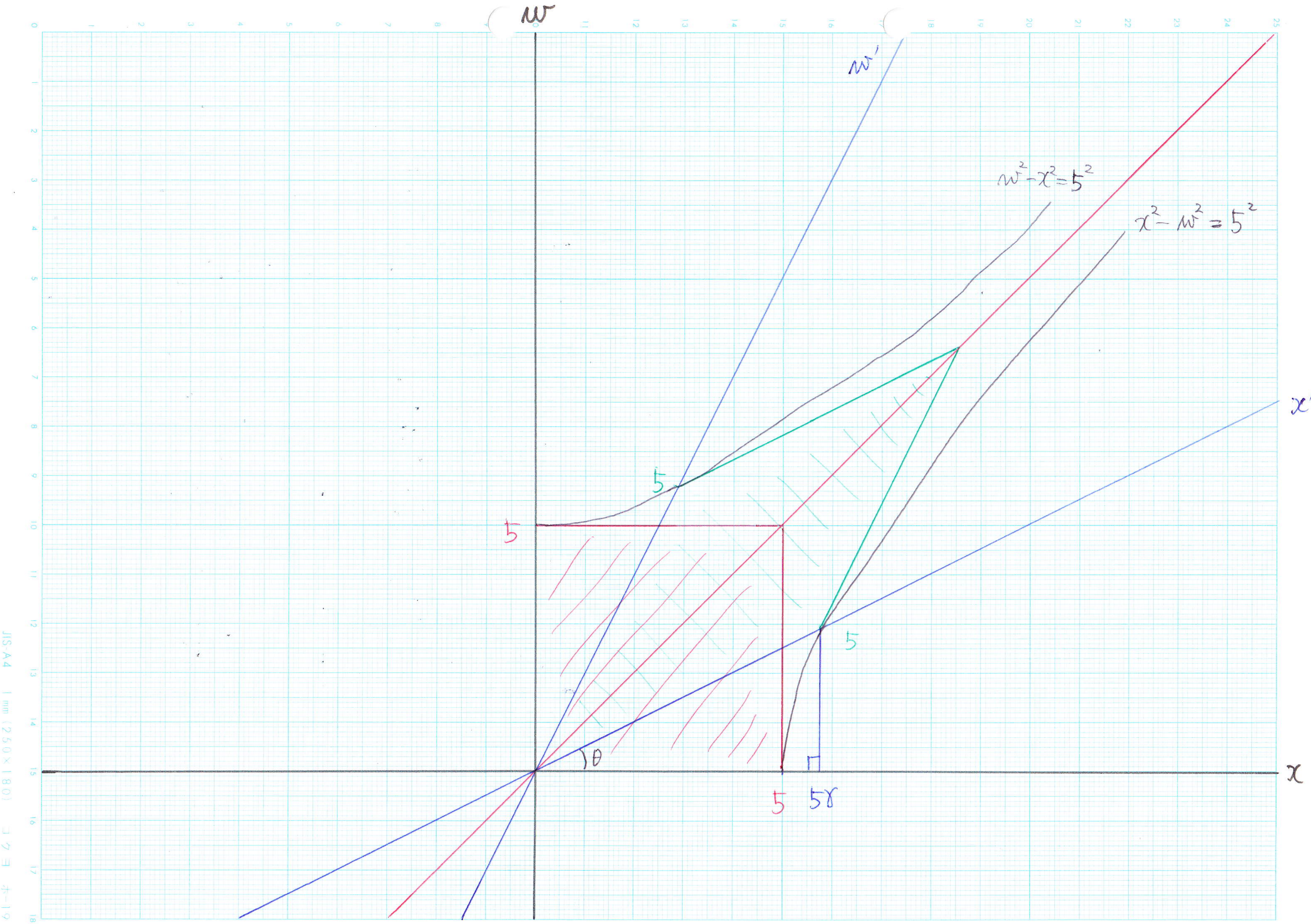
$$S = \alpha_r^2 \sin\chi = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\cos 2\theta$$

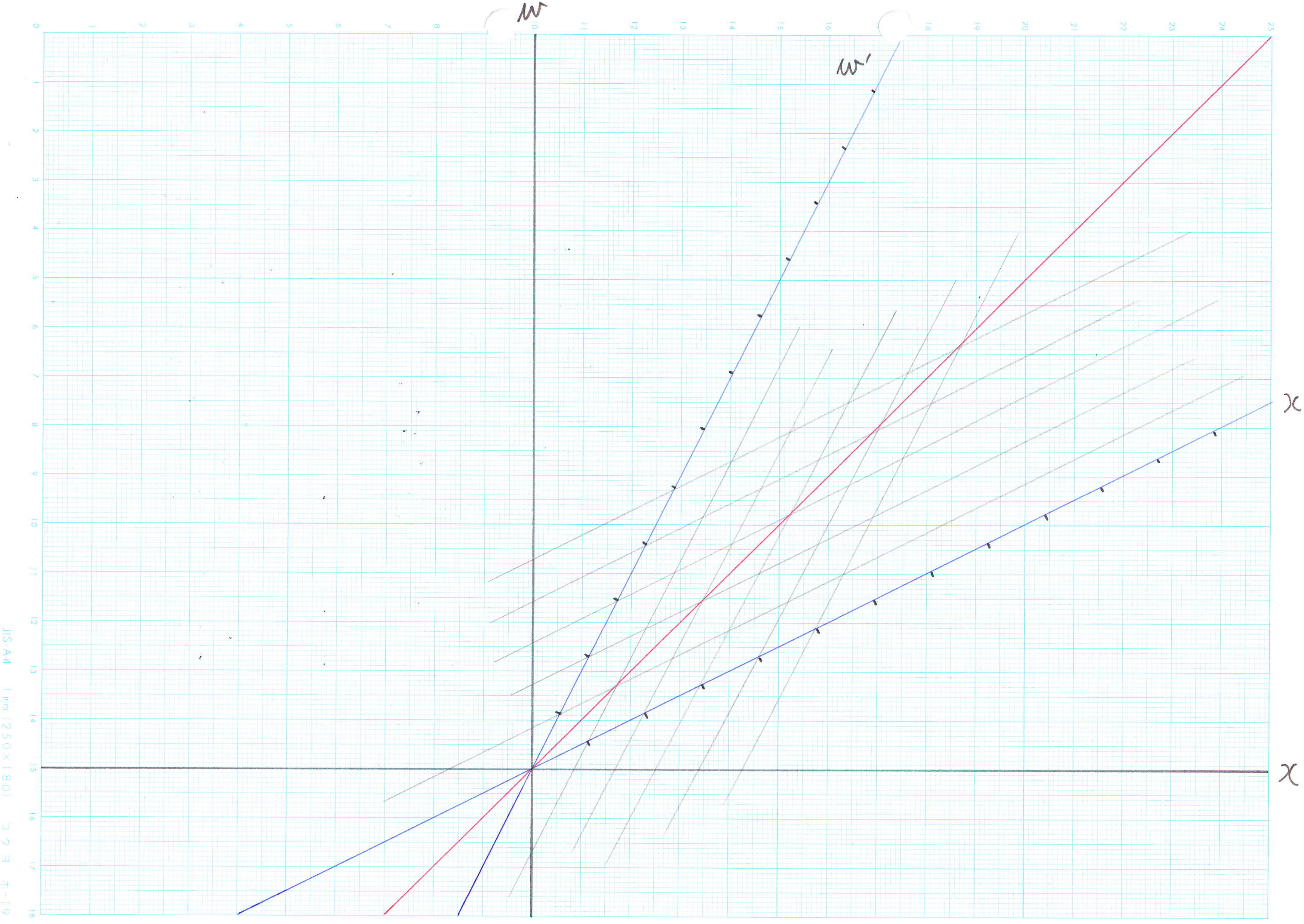
$$= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\left(\frac{1}{1+\beta^2} - \frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)$$

$$= 1$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)



w
w'
$w^2 - x^2 = 5^2$
$x^2 - w^2 = 5^2$
x'
5
5
5
θ
x
5
5γ


w
w′
x′
x