Chapter 2. Lorentz変換

2.1 Einsteinの原理

Ⅰ 特殊相対性原理

⊙ いかなる慣性系を基準にとっても、すべての物理法則は全て同じ形式で表現される。

Ⅱ 光速度不変の原理

⊙ 真空中の光の速さは、光源の運動状態に無関係に一定値 c をとる。

⊙ いかなる慣性系から見ても、光の速さは一定値 c である。

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \fallingdotseq 3 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

⊙ 2つの慣性系があったとき、$K(t, x)$, $K'(t', x')$

$$+(ct)^2 - x^2 = +(ct')^2 - x'^2$$

という量は保存される。

光速度不変の原理から (t, x) と (t', x') の関係を導びこう。

$$\begin{cases} t' = At + Bx \\ x' = Ct + Dx \end{cases}$$

とおく。A, B, C, D は座標には無関係で速さ V のみの関数である。

1次関数であることは、逆変換を求めるとき2 2価だと困るから。

番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.4 Lorentz transformation

1. 慣性系の間の変換を

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

と仮定し，

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \tag{2}$$

を満たすような A，B，C，D を決定しなさい．以下の条件も考慮する．

(a) K' 系は速さ V で走っていることから，$x' = 0 = Ct + Dx$ より，$\frac{dx}{dt} = -\frac{C}{D} = V$ である．

$C = -DV$

(b) $V = 0$ のときは，$A = D = 1$，$B = C = 0$ となる．

(2)を(1)に代入

$$c^2t^2 - x^2 = c^2(At+Bx)^2 - (Ct+Dx)^2$$
$$= c^2(A^2t^2 + 2ABtx + B^2x^2) - (C^2t^2 + 2CDtx + D^2x^2)$$
$$= (c^2A^2 - C^2)t^2 + 2(c^2AB - CD)tx + (c^2B^2 - D^2)x^2$$

したがって．

$$\begin{cases} c^2A^2 - C^2 = c^2 \xrightarrow{(a)} c^2A^2 - D^2V^2 = c^2 \cdots ① \\ c^2AB - CD = 0 \xrightarrow{(a)} c^2AB + D^2V = 0 \longrightarrow D^2 = -\frac{c^2}{V}AB \cdots ② \\ c^2B^2 - D^2 = -1 \cdots ③ \end{cases}$$

②を①に代入 $\longrightarrow A^2 + VAB = 1 \longrightarrow A(A+VB) = 1 \cdots ④$

②を③に代入 $\longrightarrow c^2B^2 - \frac{c^2}{V}AB = -1 \longrightarrow c^2B(BV+A) = -V \cdots ⑤$

$\frac{A}{c^2B} = -\frac{1}{V} \quad \therefore B = -\frac{V}{c^2}A \cdots ⑥$

⑥を④に戻して

$$A^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 \qquad \therefore A = \pm\frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \longrightarrow \text{(b)より } A = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

よって⑥より

$$B = -\frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

②より

$$D^2 = -\frac{c^2}{V}\frac{-V/c^2}{1-(V/c)^2} = \frac{1}{1-(V/c)^2} \longrightarrow \text{(b)より } D = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad \text{(a)より } C = -\frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

2. 表面の結果から，

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

とかけることがわかった．

(a) 行列式が 1 となることを示しなさい．

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1-(V/c)^2} - \frac{(V/c)^2}{1-(V/c)^2} = 1$$

(b) 式 (3) を t，x について解き，Lorentz 変換の逆変換を求めなさい．逆行列を求めてもよい．

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ \frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

(c) $c \to \infty$ のとき，Galilei 変換になることを示しなさい．(特殊相対論 No.1 参照)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.4-2 Lorentz transformation

1. Lorentz 変換 (3) を，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$ として書きなおすと，

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{V}{c^2} \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる．この逆変換は

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{V}{c^2} \\ \gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書けることより，時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ と空間微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ はいかに変換するか．

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma V\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}$$

これをまとめると.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V \\ \gamma\frac{V}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

2. d'Alembertian(ダランベルシャン)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{6}$$

は，ローレンツ変換 (4) に対してどのように変換するか．(特殊相対論 No.1-2 参照)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cancel{2\gamma^2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}} + \frac{\gamma^2}{c^2}V^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2\frac{V^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cancel{2\gamma^2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$