番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.1　Galilean transformation

1. 静止系 K からの観測

(a) 静止系 K から見て，速さ V で動く座標系 K' の原点の座標 X および速さ v で動く物体の位置 x を求め，以下の表を完成させなさい．

t〔s〕	X〔m〕	V〔m/s〕	x〔m〕	v〔m/s〕
0	0		0	
1	0.5		1	
2	1		2	
3	1.5		3	
4	2		4	
5	2.5	+0.5	5	+1
6	3		6	
7	3.5		7	
8	4		8	
9	4.5		9	
10	5		10	

(b) 縦軸に K 系の時刻 t，横軸に K 系からみた位置 x，X をとって，上の表をグラフに描きなさい．これを**時空図** (space-time diagram) といい，軌跡を**世界線** (world line) という．t 軸からの傾きは速さを表すので，以下では $\tan\theta = V$，$\tan\varphi = v$ としよう．

2. 速さ V で動く K' 系からの観測

(a) 速さ V で動いている K' 系から見て，K 系の原点の座標 X' と物体の位置 x'，およびそれぞれの速さ V'，v' を求め，以下の表を完成させなさい．

t'〔s〕	X'〔m〕	V'〔m/s〕	x'〔m〕	v'〔m/s〕
0	0		0	
1	−0.5		0.5	
2	−1		1	
3	−1.5		1.5	
4	−2		2	
5	−2.5	−0.5	2.5	+0.5
6	−3		3	
7	−3.5		3.5	
8	−4		4	
9	−4.5		4.5	
10	−5		5	

(b) **2.** の表の値を，**1.** で描いたグラフの中から読み込むために K' 系の世界線上に時刻 t' の目盛をとりなさい．時空図上で x' 座標は，t' 軸に平行な線を x 軸に下せば読むことができる．

3. 2つの座標系から見た物体の位置 x，x' の関係式を求めなさい．

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

4. Galilei 変換の式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書くことができる.

(a) この行列式が 1 であることを確かめなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

(b) 上の式 (1) を t, x について解き，Galilei 変換の逆変換を求めなさい. 逆行列を求めてもよい.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' + Vt \end{pmatrix}$$

5. 時空面積保存則 (特殊相対論 No.5 参照)

(a) $\tan\theta = V$ としたとき，$\cos\theta$, $\sin\theta$ を V で表しなさい.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

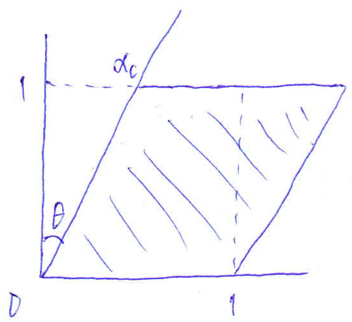
したがって,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{1+V^2} = \frac{V^2}{1+V^2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}$$

(b) 長さが 1 と $\alpha_c = \sqrt{1+V^2}$ の 2 辺が角 $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ で交わっている平行四辺形を描いて，その面積が 1 となることを示しなさい.



$$S = 1 \times \alpha_c \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

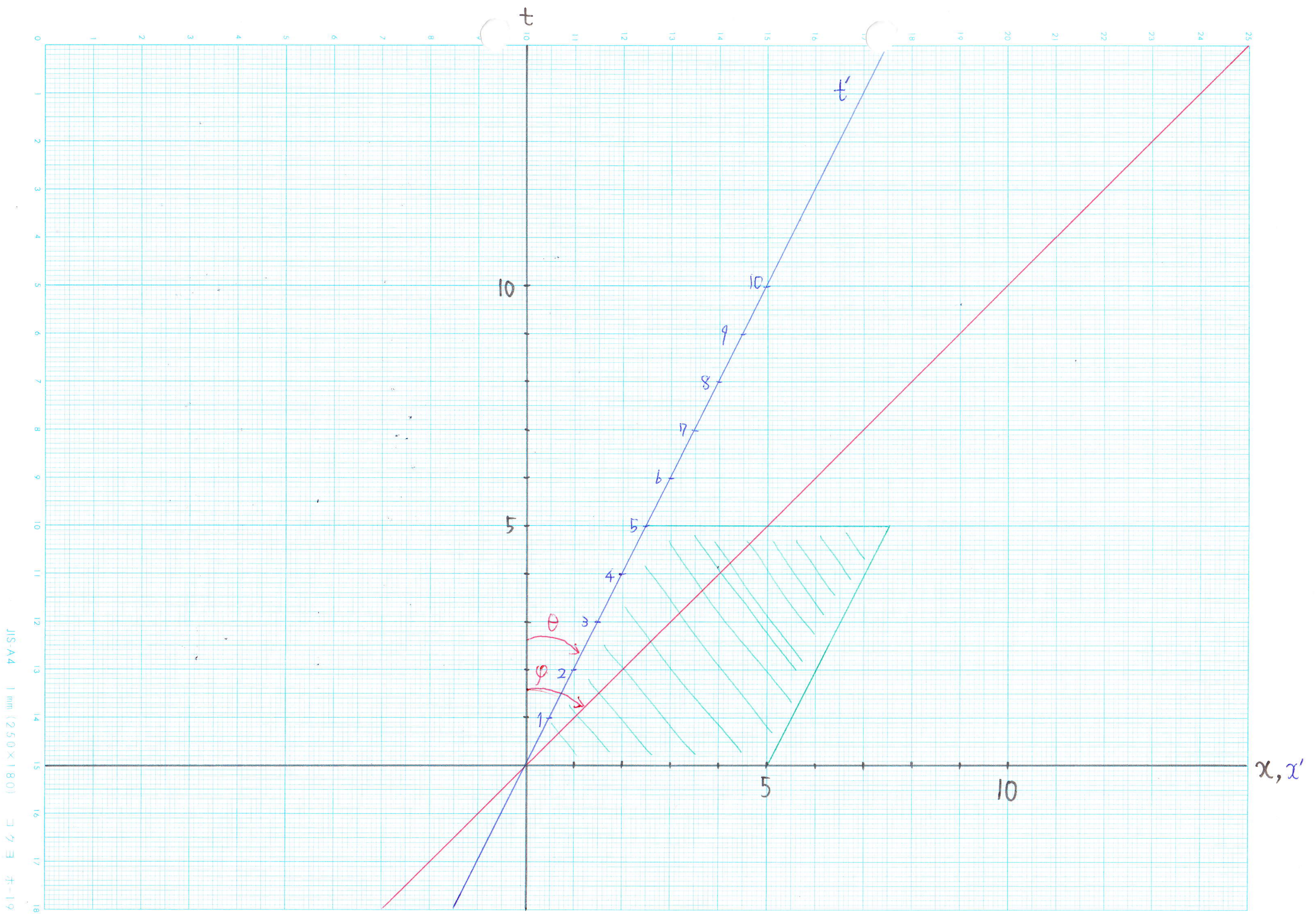
$$= \sqrt{1+V^2} \times \left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{1+V^2}\cos\theta = \sqrt{1+V^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} = 1$$

(c) $V = 0.5$ m/s のとき $\alpha_c = \sqrt{1+V^2}$ の値を求めなさい.

$$\alpha_c = \sqrt{1+(0.5)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.12$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)


t
t′
x, x′
θ
φ
10
5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.1-2　Galilean transformation

1. ガリレイ変換 (1) より，時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ と空間微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ はいかに変換するか.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

2. d'Alembertian(ダランベルシャン)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2}$$

は，ガリレイ変換 (1) に対してどのように変換するか．ここで c は光速である．(特殊相対論 No.4-2 参照)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

したがって

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}$$

……ガリレイ変換に対して不変ではない!