Chapter 8. 運動量

8.1 運動量と力積

同質量で速さが違う

⇕

同じ速さで質量が違う

このときに物体のもつ"いきおい"を表わす概念はあるのか。

Newtonの運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺をtで積分する。

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

$$mv(t_2) - mv(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

ここで

$$\begin{cases} 運動量 \quad p(t) = mv(t) \\ 力積 \quad I = \int F\,dt \end{cases}$$

と書きあらわすと、

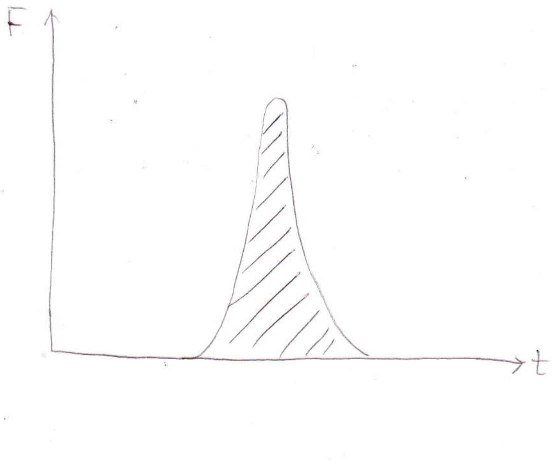
$$mv(t_2) - mv(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{2}v_{(t_2)}^2 - \frac{m}{2}v_{(t_1)}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

この意味は

物体の運動量の変化は
その間に加えられた力積に等しい。

物体の力学的エネルギーの変化は、
その間に加えられた仕事に等しい。

例えば、バットでボールを打つ…力Fが短時間に作用する。
このような力を**撃力**という。



8.2 運動量と力学的エネルギー

質量 m の物体に一定の力 F が働く場合を考える。
具体的には、自由落下運動 $F = mg$ を考える。

$$
\begin{cases}
\text{運動方程式} \quad m\dfrac{dv}{dt} = F \longrightarrow \dfrac{d}{dt}(mv) = F \longrightarrow \Delta p = \displaystyle\int F\,dt \ \text{：力積} \\[2ex]
\text{エネルギー積分} \quad mv\dfrac{dv}{dt} = vF \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{2}v^2\right) = \underbrace{v \cdot F}_{\text{仕事率}} \longrightarrow \Delta E = \displaystyle\int F\,dx \ \text{：仕事}
\end{cases}
$$

ここで

$$p = mv$$

$$E = \frac{m}{2}v^2$$

とおくと

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp}{dt} = F \\[2ex]
\dfrac{dE}{dt} = vF = \dfrac{p}{m}F
\end{cases}
$$

番号　　　　　　　氏名

動力学 No.20　運動量と力学的エネルギー

自由落下運動に対する運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F = mg \tag{1}$$

を初期条件 ($t = 0$ のとき $x = v = 0$) で積分して

$$x = \frac{g}{2}t^2, \qquad v = gt \tag{2}$$

となった．これから運動量と力学的エネルギーを求めよう．$\epsilon = \frac{2}{50} = 0.040$ s，$m = 0.50$ kg，$g = 9.8$ m/s^2，$F = mg = 4.9$ N とし，小数第4位を四捨五入しなさい．

時刻 t	位置 $x = \frac{g}{2}t^2$	速さ $v = gt$	運動量 $p = mv$	Δp	力積 $F\Delta t$	力学的エネルギー $E = \frac{m}{2}v^2$	ΔE	仕事 $F\Delta x$
0	0	0	0	*****	*****	0	*****	*****
				0.196	0.196		0.038	0.039
ϵ	0.008	0.392	0.196			0.038		
				0.196	0.196		0.116	0.113
2ϵ	0.031	0.784	0.392			0.154		
				0.196	0.196		0.192	0.196
3ϵ	0.071	1.176	0.588			0.346		
				0.196	0.196		0.269	0.265
4ϵ	0.125	1.568	0.784			0.615		
				0.196	0.196		0.345	0.348
5ϵ	0.196	1.960	0.980			0.960		
				0.196	0.196		0.423	0.421
6ϵ	0.282	2.352	1.176			1.383		
				0.196	0.196		0.499	0.500
7ϵ	0.384	2.744	1.372			1.882		
				0.196	0.196		0.577	0.578
8ϵ	0.502	3.136	1.568			2.459		
				0.196	0.196		0.653	0.652
9ϵ	0.635	3.528	1.764			3.112		
				0.196	0.196		0.730	0.730
10ϵ	0.784	3.920	1.960			3.842		
				0.196	0.196		0.806	0.809
11ϵ	0.949	4.312	2.156			4.648		
				0.196	0.196		0.884	0.882
12ϵ	1.129	4.704	2.352			5.532		
				0.196	0.196		0.960	0.960
13ϵ	1.325	5.096	2.548			6.492		
				0.196	0.196		1.038	1.039
14ϵ	1.537	5.488	2.744			7.530		
				0.196	0.196		1.114	1.112
15ϵ	1.764	5.880	2.940	*****	*****	8.644	*****	*****

1. 縦軸に運動エネルギー E，横軸に運動量 p をとった $E-p$ グラフを描きなさい．

2. 縦軸に質量 m，横軸に運動量 p をとった $m-p$ グラフを描きなさい．

3. 運動量 $p=mv$ と力積 $I=\int F dt$ が同じ単位であることを確かめなさい．

$[p]=[mv]=kg\cdot m/s$

$[I]=[\int F dt]=N\cdot s=kg\cdot m/s^2\cdot s=kg\cdot m/s$

4. 運動量 p と力学的エネルギー E は，速さの関数として

$$p=mv \qquad E=\frac{m}{2}v^2 \tag{3}$$

と表された．

(a) 速さ v を運動量 p で表しなさい．

$v=\frac{p}{m}$

(b) エネルギー E を運動量 p で表しなさい．

$E=\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2=\frac{p^2}{2m}$

5. 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} &= F \\ \dfrac{dE}{dt} &= vF=\dfrac{p}{m}F \end{cases} \tag{4}$$

を F を消去することによって解きなさい．初期条件は $t=0$ のとき $v=0$ より，$p=E=0$ である．

$\frac{dE}{dt}=\frac{p}{m}\frac{dp}{dt}$

$\frac{d}{dt}\left[E-\frac{p^2}{2m}\right]=0$

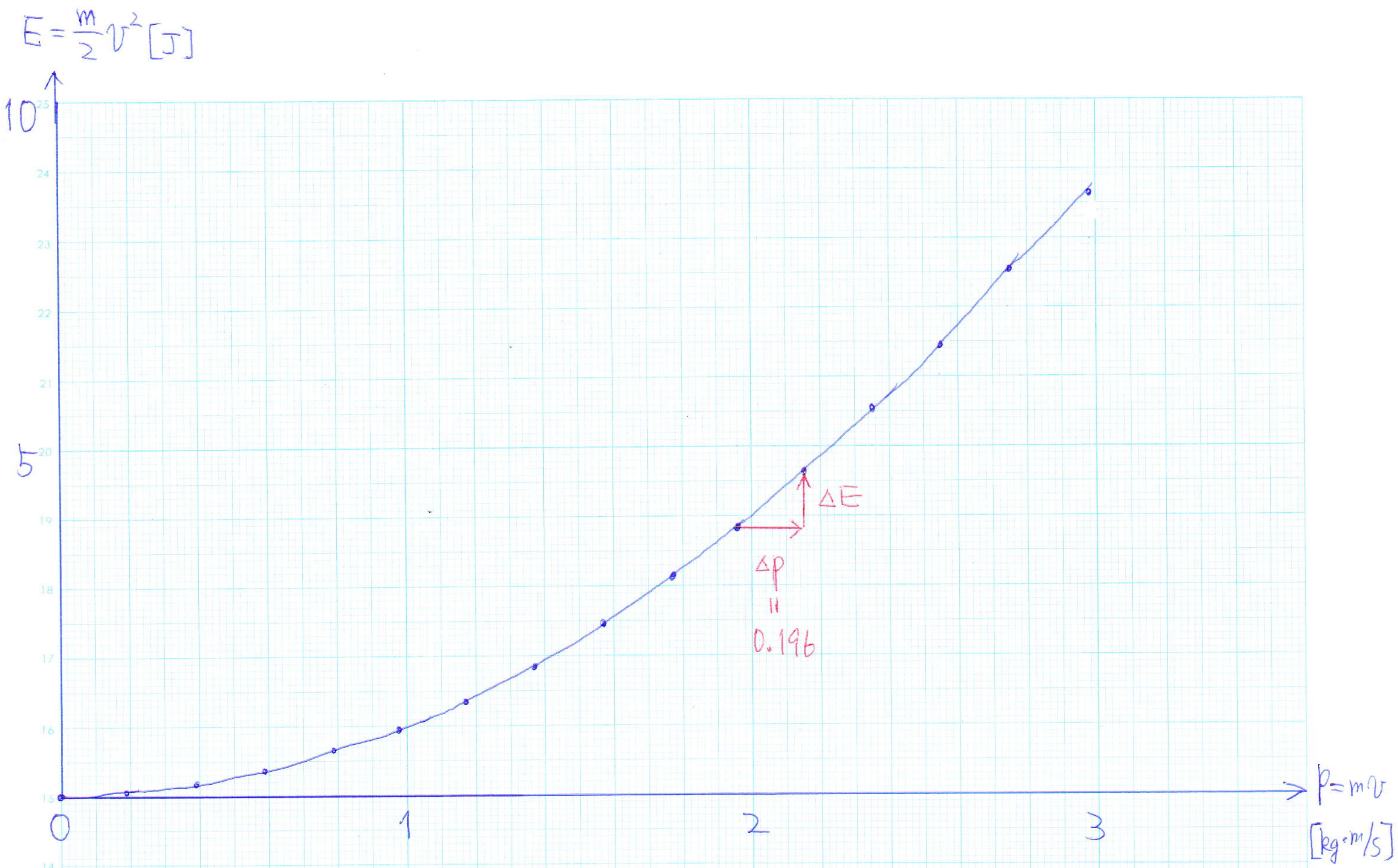
$\therefore E=\frac{p^2}{2m}+C$ (積分定数)

初期条件から $C=0$

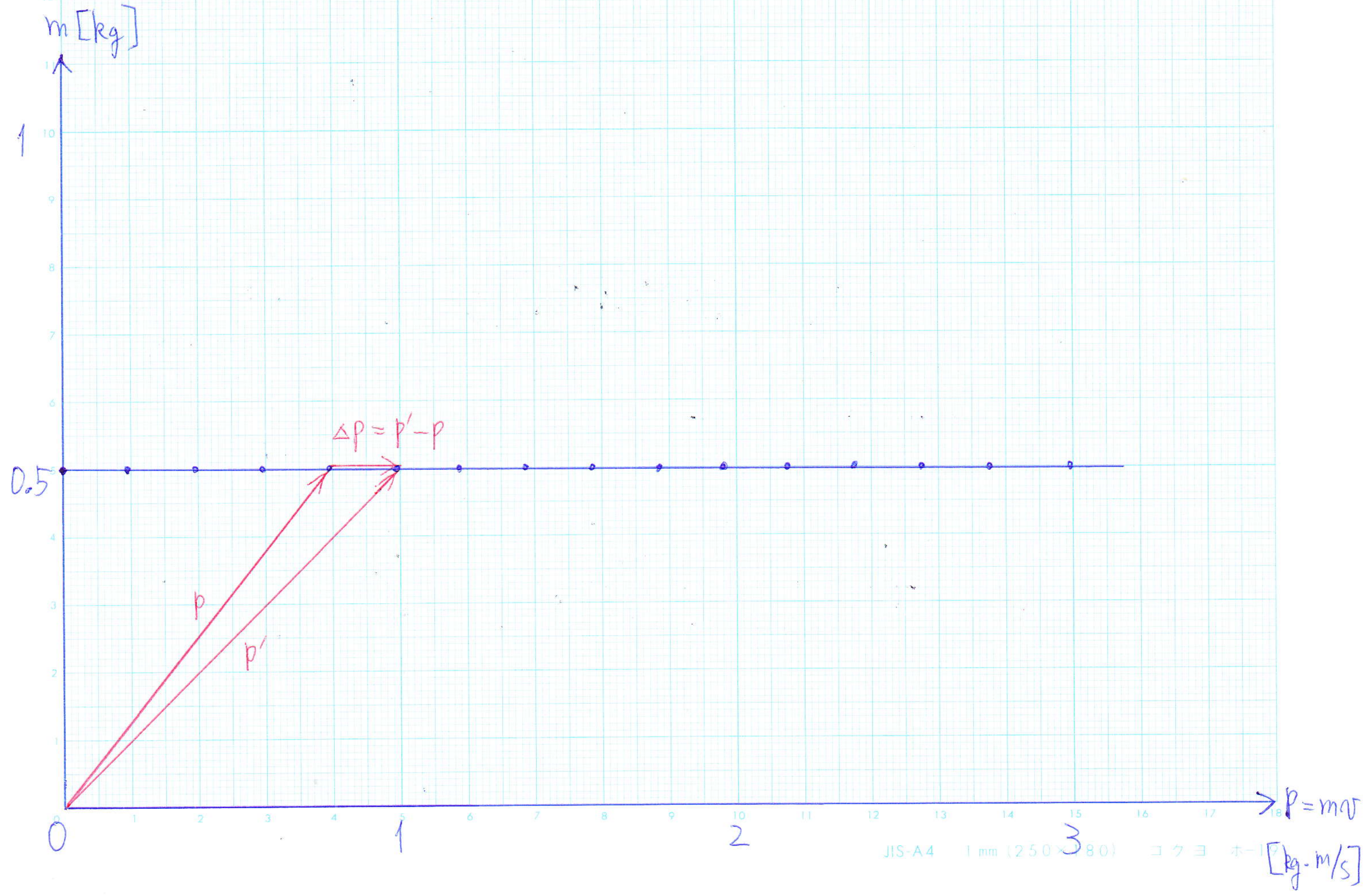
よって

$E=\frac{p^2}{2m}$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)



E = m/2 v^2 [J]
10
5
ΔE
Δp
=
0.196
0
1
2
3
p = mv
[kg·m/s]



m [kg]
1
0.5
Δp = p′ − p
p
p′
0
1
2
3
p = mv
[kg·m/s]