番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.18　エネルギー保存則 (1)

目的 おもりを自由落下させたときの力学的エネルギー保存則を調べる．

方法 スタンドに記録タイマーをとりつけ，おもりに紙テープをつけて自然におもりを落とし，そのときの運動を記録する．重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，おもりの質量を $m = 0.50\ \mathrm{kg}$ とする．小数第 4 位を四捨五入しなさい．

測定データ　$\epsilon = \frac{2}{50} = 0.040\ \mathrm{s}$ とする．

0.25　4.9

時刻 t〔s〕	速さ v〔m/s〕	$\frac{m}{2}v^2$	高さ x〔m〕	mgx	$\frac{m}{2}v^2 + mgx$
0	0	0	1.304	6.390	6.390
ϵ	0.38	0.036	1.296	6.350	6.386
2ϵ	0.76	0.144	1.273	6.238	6.382
3ϵ	1.14	0.325	1.236	6.056	6.381
4ϵ	1.52	0.578	1.187	5.816	6.394
5ϵ	1.90	0.903	1.123	5.503	6.406
6ϵ	2.28	1.300	1.036	5.076	6.376
7ϵ	2.66	1.769	0.942	4.616	6.385
8ϵ	3.04	2.310	0.825	4.043	6.353
9ϵ	3.42	2.924	0.693	3.396	6.320
10ϵ	3.80	3.610	0.544	2.666	6.276
11ϵ	4.18	4.368	0.387	1.896	6.264
12ϵ	4.56	5.198	0.204	1.000	6.198
13ϵ	4.94	6.101	0.0	0	6.101

1. 縦軸に $\frac{m}{2}v^2$，mgx，$\frac{m}{2}v^2 + mgx$，横軸に時刻 t をとったグラフを，一枚のミリ方眼紙に描きなさい．

2. 質量 $m = 0.50$ kg の物体の落下運動に対する Newton の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \tag{1}$$

について以下の問いに答えなさい．

(a) 運動方程式を初期条件 $x(0) = 1.304$ m，$v(0) = 0.0$ m/s のもとに解いて $v(t)$，$x(t)$ を求めなさい．

$\frac{dv}{dt} = -9.8$

$v = -9.8t + v_0$ 初期条件から $v = -9.8t$

$x = -4.9t^2 + x_0$ 初期条件から $x = -4.9t^2 + 1.304$

(b) 運動エネルギー $K = \frac{m}{2}v^2$ を時刻 t の関数として表わしなさい．

$K = \frac{0.5}{2} \times (-9.8t)^2 = 24.01t^2$

(c) 位置エネルギー $U = mgx$ を時刻 t の関数として表わしなさい．

$U = 0.5 \times 9.8 \times (-4.9t^2 + 1.304) = -24.01t^2 + 6.3896$

(d) 力学的エネルギー $E = K + U$ を求めなさい．時刻 t を含まない定数となるか？

$E = K + U = 6.3896$

3. 運動エネルギー $\frac{m}{2}v^2$ が，仕事と同じ単位 J であることを確かめなさい．

$kg \times (m/s)^2 \doteqdot kg \times m/s^2 \times m = N \times m = J$

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.18-2 エネルギー保存則 (1)

1. 地球から質量 m〔kg〕の人工衛星を打ち上げる．地上から x〔m〕での人工衛星の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = F = -G\frac{Mm}{(R+x)^2} \tag{2}$$

と書くことができる．ここで，M，Rは地球の質量と半径であり，Gは万有引力定数である．

(a) 地球表面 ($x = 0$) での重力は $F = -mg$ である．重力加速度 g を求めなさい．ただし，$M = 6.0 \times 10^{24}$ kg，$R = 6400$ km，$G = 6.7 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 である．

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.7\times10^{-11}\cdot 6.0\times10^{24}}{(6400\times10^3)^2} = \frac{6.7\times10^{-11}\cdot 6.0\times10^{24}}{(6.4)^2\times10^{12}} = 0.9814\times10^1 = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

(b) 運動方程式のエネルギー積分を実行し，初期条件 $t = 0$ のとき $x = 0$，$v = v_0$ のもとで

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2gR^2}{R+x} - 2gR \tag{3}$$

となることを示しなさい．

$$v\frac{dv}{dt} = -GM\frac{1}{(R+x)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{v^2}{2} = -GM\int\frac{dx}{(R+x)^2}$$

$$= \frac{GM}{R+x} + C\ (\text{積分定数})$$

初期条件から

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{GM}{R} + C$$

$$\therefore C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

したがって

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R+x} + \frac{v_0^2}{2} - gR$$

$$\therefore v^2 = \frac{2gR^2}{R+x} + v_0^2 - 2gR$$

(c) 地球の重力から脱出する ($x \to \infty$ のとき $v \geq 0$) ための初速度 v_e は何 km/s か．また何 km/h か．この v_e を**第 2 宇宙速度**または**脱出速度**という．

$$v^2 = v_0^2 - 2gR \geqq 0$$

$$v_0 = v_e \geqq \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \times 6400 \times 10^3}$$

$$= 11.2 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$$

$$= 11.2 \ \mathrm{km/s}$$

$$= 4.0 \times 10^4 \ \mathrm{km/h}$$