

動力学 No.15 運動方程式を解く (10) 過減衰

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) = v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

ここで、 $a(t) = -\omega_0^2 x(t) - 2\mu_0 v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)$ である。

また、 $\epsilon = 0.50 \text{ s}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 1.0 \text{ s}^{-2}$, $2\mu_0 = \frac{\mu}{m} = 3.0 \text{ s}^{-1}$ とし、
 小数第4位を四捨五入しなさい。

時刻 t [s]	位置 $x(t)$ [m]	速さ $v(t)$ [m/s]	加速度 $a(t)$ [m/s ²]
0	$x(0) = 1.0$	$v(0) = 0.0$	$a(0) = -1.0$
ϵ	$1.0 - 0.5 \times 0.25 = 0.875$	$v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0) = -0.25$	-0.125
2ϵ	$0.875 - 0.5 \times 0.313 = 0.719$	-0.313	0.219
3ϵ	$0.719 - 0.5 \times 0.203 = 0.618$	-0.203	-0.008
4ϵ	$0.618 - 0.5 \times 0.207 = 0.515$	-0.207	0.107
5ϵ	$0.515 - 0.5 \times 0.153 = 0.439$	-0.153	0.023
6ϵ	$0.439 - 0.5 \times 0.142 = 0.368$	-0.142	0.059
7ϵ	$0.368 - 0.5 \times 0.112 = 0.312$	-0.112	0.026
8ϵ	$0.312 - 0.5 \times 0.099 = 0.263$	-0.099	0.036
9ϵ	$0.263 - 0.5 \times 0.081 = 0.223$	-0.081	0.022
10ϵ	$0.223 - 0.5 \times 0.070 = 0.188$	-0.070	0.024
11ϵ	$0.188 - 0.5 \times 0.058 = 0.159$	-0.058	0.017
12ϵ	$0.159 - 0.5 \times 0.049 = 0.135$	-0.049	0.016
13ϵ	$0.135 - 0.5 \times 0.041 = 0.115$	-0.041	0.013
14ϵ	$0.115 - 0.5 \times 0.035 = 0.098$	-0.035	0.011
15ϵ	$0.098 - 0.5 \times 0.029 = 0.084$	-0.029	0.009

- $x-t$ グラフを描きなさい。
- Newton の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

を解くことを考えよう。

- (a) 解の形を $x(t) = e^{\lambda t}$ と仮定しよう。これを微分方程式に代入して、 λ に対する二次方程式をもとめよう。

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

- (b) 上の二次方程式を解いて、 λ_1 と λ_2 を求めなさい。

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -0.38 \\ -2.62 \end{cases}$$

- (c) 解は A, B を定数として、 $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ と書くことができる。 $x(t)$ を書き下しなさい。

$$x(t) = A e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + B e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}$$

- (d) 上で求めた $x(t)$ を t で微分して速さ $v(t)$ を求めなさい。

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} A e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{-3-\sqrt{5}}{2} B e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}$$

- (e) 初期条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ から定数を求め、 $x(t)$ を決定しなさい。

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= A + B = 1 \\ v(0) &= \frac{-3+\sqrt{5}}{2} A + \frac{-3-\sqrt{5}}{2} B = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} = 1.17 \\ B &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10} = -0.17 \end{aligned}$$

したがって

$$x(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \left\{ \frac{5+3\sqrt{5}}{10} e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t} \right\} = 1.17 e^{-0.38t} - 0.17 e^{-2.62t}$$

- 日常生活の中で、過減衰の例をあげ説明しなさい。

- 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)