番号　　　　　氏名

動力学 No.13　運動方程式を解く (8) 減衰振動

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) & = x(t) + \epsilon\, v\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon\, a(t) \end{cases}$$

ここで，$a(t) = -\omega_0^2 x(t) - 2\mu_0 v(t-\frac{\epsilon}{2})$ である．
また，$\epsilon = 0.50$ s，$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 1.0\ \mathrm{s}^{-2}$，$2\mu_0 = \frac{\mu}{m} = 0.20\ \mathrm{s}^{-1}$ とし，
小数第 4 位を四捨五入しなさい．

時刻 t 〔s〕	位置 $x(t)$ 〔m〕	速さ $v(t)$ 〔m/s〕	加速度 $a(t)$ 〔m/s^2〕
0	$x(0) = 1.0$	$v(0) = 0.0$	$a(0) = -1.0$
		$v(\frac{\epsilon}{2}) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= -0.25$	
ϵ	1,0 − 0,5 × 0,25 = 0,875		−0.825
		−0.663	
2ϵ	0,875 − 0,5 × 0,663 = 0,544		−0.411
		−0.868	
3ϵ	0,544 − 0,5 × 0,868 = 0,110		0.064
		−0.836	
4ϵ	0,110 − 0,5 × 0,836 = −0,308		0.476
		−0.598	
5ϵ	−0,308 − 0,5 × 0,598 = −0,607		0.727
		−0.235	
6ϵ	−0,607 − 0,5 × 0,235 = −0,725		0.772
		0.151	
7ϵ	−0,725 + 0,5 × 0,151 = −0.650		0.619
		0.461	
8ϵ	−0,650 + 0,5 × 0,461 = −0,420		0.327
		0.624	
9ϵ	−0,420 + 0,5 × 0,624 = −0,108		−0.018
		0.615	
10ϵ	−0,108 + 0,5 × 0,615 = 0,200		−0.324
		0.453	
11ϵ	0,200 + 0,5 × 0,453 = 0,427		−0.518
		0.194	
12ϵ	0,427 + 0,5 × 0,194 = 0,524		−0.563
		−0.087	
13ϵ	0,524 − 0,5 × 0,087 = 0,481		−0.463
		−0.319	
14ϵ	0,481 − 0,5 × 0,319 = 0,322		−0.257
		−0.448	
15ϵ	0,322 − 0,5 × 0,448 = 0.098		−0.008
		*****	

1. $x-t$ グラフを描きなさい．振動運動 (動力学 No.12) の $x-t$ グラフも書き込みなさい．

2. Newton の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+0.2\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{1}$$

を解くことを考えよう．

(a) 解の形を $x(t)=e^{\lambda t}$ と仮定しよう．これを微分方程式に代入して，λ に対する二次方程式をもとめよう．

(b) 上の二次方程式を解いて，λ_1 と λ_2 を求めなさい．

(c) 解は A, B を定数として，

$$x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t} \tag{2}$$

と書くことができる．オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を使って $x(t)$ を書き直しなさい．

(d) 上で求めた $x(t)$ を t で微分して速さ $v(t)$ を求めなさい．

(e) 初期条件 $x(0)=1, v(0)=0$ から定数を求め，$x(t)$ を決定しなさい．

3. 日常生活の中で，減衰振動の例をあげ説明しなさい．

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

$\boxed{2}$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2\frac{dx}{dt} + x = 0$

(a) $x = e^{\lambda t}$ と仮定すると、

$$\lambda^2 + 0.2\lambda + 1 = 0$$

(b) $\lambda = -0.1 \pm \sqrt{0.1^2 - 1} = -0.1 \pm \sqrt{-0.99} \fallingdotseq -0.1 \pm i\,0.995 = -a \pm ib$

(c) $x = Ae^{(-a+ib)t} + Be^{(-a-ib)t}$

$$= e^{-at}\left(Ae^{ibt} + Be^{-ibt}\right)$$

$$= e^{-at}\left(A\cos bt + iA\sin bt + B\cos bt - iB\sin bt\right)$$

$$= e^{-at}\left\{\underbrace{(A+B)}_{=C}\cos bt + i\underbrace{(A-B)}_{=D}\sin bt\right\}$$

$$= e^{-at}\left(C\cos bt + D\sin bt\right)$$

(d) ここで速さは、

$$v = \frac{dx}{dt} = -ae^{-at}\left(C\cos bt + D\sin bt\right) + e^{-at}\left(-bC\sin bt + bD\cos bt\right)$$

$$= e^{-at}\left(-aC + bD\right)\cos bt + e^{-at}\left(-aD - bC\right)\sin bt$$

(e) 初期条件から、

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = C = 1 \\ v(0) = -aC + bD = 0 \end{array}\right\} D = \frac{a}{b} = \frac{0.1}{\sqrt{0.99}} \fallingdotseq 0.1$$

以上から、

$$x(t) = \underbrace{e^{-0.1t}}_{\text{減衰項}}\underbrace{\left\{\cos(0.995t) + 0.1\sin(0.995t)\right\}}_{\text{振動項}}.$$