

動力学 No.11

運動方程式を解く (6) 惑星の運動

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) &= x(t) + \epsilon v_x \left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v_x \left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v_x \left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a_x(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y(t+\epsilon) &= y(t) + \epsilon v_y \left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v_y \left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v_y \left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a_y(t) \end{cases}$$

ここで、加速度は、

$$a_x(t) = -GM \frac{x(t)}{r^3(t)}, \quad a_y(t) = -GM \frac{y(t)}{r^3(t)}$$

と表され、 $r(t)$ は太陽からの距離 $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ である。 $\epsilon = 0.20$ s, $GM = 1.0$ m³/s² とし、小数第4位を四捨五入しなさい。

1. 横軸に x 、縦軸に y をとったグラフを描きなさい。

2. Kepler 第1法則 (1609) …惑星の運動は楕円である

(a) 楕円において長半径を a 、短半径を b とすると、楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表される。グラフから、 a と b の値を求めなさい。

$$a = 0.815 \quad b = 0.735$$

(b) 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ を求めなさい。 e の値によって、運動の形体が変わる。

$$e = \frac{\sqrt{0.815^2 - 0.735^2}}{0.815} = 0.432$$

$e > 1$	双曲線
$e = 1$	放物線
$0 < e < 1$	楕円
$e = 0$	円

3. Kepler 第2法則 (1609) …面積速度一定の法則

(a) 時刻 $t = 0 \sim \epsilon$ の面積を求めなさい。

$$\frac{1}{2} \times 0.5 \times 0.326 = 0.0815$$

(b) 時刻 $t = 11\epsilon \sim 12\epsilon$ の面積を求めなさい。

$$\frac{1}{2} \times 1.131 \times 0.146 = 0.0830$$

4. Kepler 第3法則 (1619) … $T^2/a^3 = \text{一定}$

(a) 周期は $T = 23\epsilon$ である。 $\frac{T^2}{a^3}$ を計算しなさい。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(23 \times 0.2)^2}{(0.815)^3} = 39.09$$

(b) 上の計算が、 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = 4\pi^2$ を満たしていることを確かめなさい。

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 = 4 \times (3.14)^2 = 39.48$$

時刻 t [s]	位置 x [m]	位置 y [m]	速さ v_x [m/s]	速さ v_y [m/s]
0	$x(0) = 0.5$	$y(0) = 0.0$	$v_x(0) = 0.0$	$v_y(0) = 1.63$
			$v_x(\frac{\epsilon}{2}) = -0.4$	$v_y(\frac{\epsilon}{2}) = 1.63$
ϵ	0.420	0.326	-0.959	1.196
2ϵ	0.228	0.565	-1.160	0.697
3ϵ	-0.004	0.704	-1.158	0.294
4ϵ	-0.236	0.763	-1.066	-0.005
5ϵ	-0.449	0.762	-0.936	-0.225
6ϵ	-0.636	0.717	-0.792	-0.388
7ϵ	-0.794	0.639	-0.642	-0.509
8ϵ	-0.922	0.537	-0.491	-0.597
9ϵ	-1.020	0.418	-0.339	-0.659
10ϵ	-1.088	0.286	-0.186	-0.700
11ϵ	-1.125	0.146	-0.032	-0.720
12ϵ	-1.131	0.002	0.123	-0.720
13ϵ	-1.106	-0.142	0.283	-0.700
14ϵ	-1.049	-0.282	0.446	-0.656
15ϵ	-0.960	-0.413	0.614	-0.584
16ϵ	-0.837	-0.530	0.785	-0.476
17ϵ	-0.680	-0.625	0.958	-0.318
18ϵ	-0.488	-0.689	1.121	-0.090
19ϵ	-0.264	-0.707	1.245	0.239
20ϵ	-0.015	-0.659	1.257	0.700
21ϵ	0.236	-0.519	1.003	1.264
22ϵ	0.437	-0.266	0.343	1.667
23ϵ	= 0.506	= 0.067	*****	*****

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)