

6.3 運動方程式を解く

§0. Newtonの運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{または} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

----- カFがわかれば、 t で積分することによつて

物体の運動(速さ, 位置)を決定することができる。

積分定数は、初期条件($t=0$ での速さ v_0 と位置 x_0)から求まる。

逆に ----- 初期($t=0$)の速さ v_0 と位置 x_0 がわかると、

カFによつて時々刻々と物体の運動が決まってくる。

前回の復習

$$m \frac{dv}{dt} = mg$$

↓

積分

$$v = gt$$

↓

積分

$$x = \frac{g}{2} t^2$$

§1. 運動方程式のしくみ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad \text{または} \quad m \frac{dv}{dt} = F$$



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = a(t); \text{加速度} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} = v(t) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(t+\epsilon) - v(t)}{\epsilon} = \frac{F}{m} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = v(t) + \epsilon \frac{F}{m} = v(t) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

時刻 $(t+\epsilon)$ の位置と速度がわかる!
時刻 t の位置と速度がわかる!



ここで、 $F = mg$ のときを考えよう。

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = v(t) + \epsilon g \end{cases}$$

動力学 No.6 運動方程式を解く (1) 自由落下運動

1. オイラー (Euler) 法

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = v(t) + \epsilon g \end{cases} \quad (1)$$

文字式のみでよい。
数値計算は不要

時刻 t [s]	落下距離 $x(t)$ [m]	速さ $v(t)$ [m/s]
0	$x(0) = 0.0$	$v(0) = 0.0$
ϵ	$0 + \epsilon \times 0 = 0$	$0 + \epsilon g = \epsilon g = 0.392$
2ϵ	$0 + \epsilon \times \epsilon g = \epsilon^2 g = 0.016$	$\epsilon g + \epsilon g = 2\epsilon g = 0.784$
3ϵ	$\epsilon^2 g + \epsilon \times 2\epsilon g = 3\epsilon^2 g = 0.047$	$2\epsilon g + \epsilon g = 3\epsilon g = 1.176$
4ϵ	$3\epsilon^2 g + \epsilon \times 3\epsilon g = 6\epsilon^2 g = 0.094$	$3\epsilon g + \epsilon g = 4\epsilon g = 1.568$
5ϵ	$6\epsilon^2 g + \epsilon \times 4\epsilon g = 10\epsilon^2 g = 0.157$	$4\epsilon g + \epsilon g = 5\epsilon g = 1.960$
6ϵ	$10\epsilon^2 g + \epsilon \times 5\epsilon g = 15\epsilon^2 g = 0.235$	$5\epsilon g + \epsilon g = 6\epsilon g = 2.352$
7ϵ	$15\epsilon^2 g + \epsilon \times 6\epsilon g = 21\epsilon^2 g = 0.329$	$6\epsilon g + \epsilon g = 7\epsilon g = 2.744$
8ϵ	$21\epsilon^2 g + \epsilon \times 7\epsilon g = 28\epsilon^2 g = 0.439$	$7\epsilon g + \epsilon g = 8\epsilon g = 3.136$
9ϵ	$28\epsilon^2 g + \epsilon \times 8\epsilon g = 36\epsilon^2 g = 0.564$	$8\epsilon g + \epsilon g = 9\epsilon g = 3.528$
10ϵ	$36\epsilon^2 g + \epsilon \times 9\epsilon g = 45\epsilon^2 g = 0.706$	$9\epsilon g + \epsilon g = 10\epsilon g = 3.920$
11ϵ	$45\epsilon^2 g + \epsilon \times 10\epsilon g = 55\epsilon^2 g = 0.862$	$10\epsilon g + \epsilon g = 11\epsilon g = 4.312$
12ϵ	$55\epsilon^2 g + \epsilon \times 11\epsilon g = 66\epsilon^2 g = 1.035$	$11\epsilon g + \epsilon g = 12\epsilon g = 4.704$
\vdots	\vdots	\vdots
$n\epsilon$	$\frac{n(n-1)}{2} \epsilon^2 g$	$n\epsilon g$

2. 最後の欄において、 $t = n\epsilon$ において $n \rightarrow \infty$ の極限をとりなさい。(動力学 No.5 1. 参照)

$$v = gt$$

$$x = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{t}{n}\right)^2 g = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^2 g \rightarrow \frac{1}{2} gt^2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

3. 蛙飛び (leapfrog) 法

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) = v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon g \end{cases} \quad (2)$$

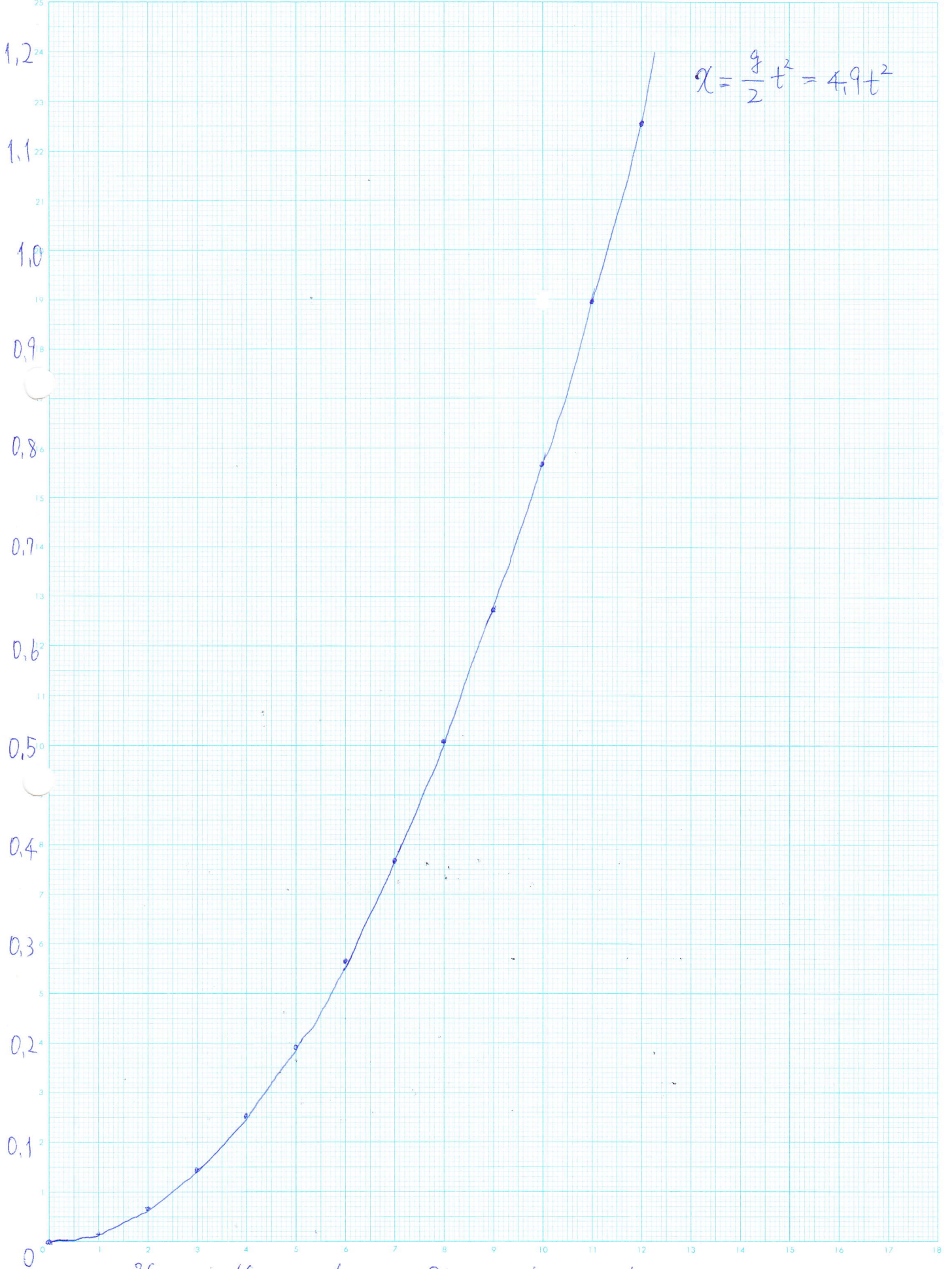
$0.04 \times 9.8 = 0.392$

ここで、 $\epsilon = \frac{2}{50} = 0.040$ s, $g = 9.8$ m/s² とする。小数第4位を四捨五入しなさい。

時刻 t [s]	落下距離 $x(t)$ [m]	速さ $v(t)$ [m/s]	加速度 $a(t)$ [m/s ²]
0	$x(0) = 0.0$	初期条件 $v(0) = 0.0$	$a(0) = 9.8$
ϵ	$0 + 0.04 \times 0.196 = 0.008$	$v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}g$ $= 0 + \frac{0.04}{2} \times 9.8 = 0.196$	9.8
2ϵ	$0.008 + 0.04 \times 0.588 = 0.032$	$0.196 + 0.392 = 0.588$	9.8
3ϵ	$0.032 + 0.04 \times 0.980 = 0.071$	$0.588 + 0.392 = 0.980$	9.8
4ϵ	$0.071 + 0.04 \times 1.372 = 0.126$	$0.980 + 0.392 = 1.372$	9.8
5ϵ	$0.126 + 0.04 \times 1.764 = 0.197$	$1.372 + 0.392 = 1.764$	9.8
6ϵ	$0.197 + 0.04 \times 2.156 = 0.283$	$1.764 + 0.392 = 2.156$	9.8
7ϵ	$0.283 + 0.04 \times 2.548 = 0.385$	$2.156 + 0.392 = 2.548$	9.8
8ϵ	$0.385 + 0.04 \times 2.940 = 0.503$	$2.548 + 0.392 = 2.940$	9.8
9ϵ	$0.503 + 0.04 \times 3.332 = 0.636$	$2.940 + 0.392 = 3.332$	9.8
10ϵ	$0.636 + 0.04 \times 3.724 = 0.785$	$3.332 + 0.392 = 3.724$	9.8
11ϵ	$0.785 + 0.04 \times 4.116 = 0.950$	$3.724 + 0.392 = 4.116$	9.8
12ϵ	$0.950 + 0.04 \times 4.508 = 1.130$	$4.116 + 0.392 = 4.508$ *****	9.8

- 縦軸に落下距離 x , 横軸に時刻 t をとった $x-t$ グラフを描きなさい。
- 縦軸に速さ v , 横軸に時刻 t をとった $v-t$ グラフを描きなさい。
- 動力学 No.1 の落下距離 $x(t)$ ・速さ $v(t)$ と上の表の値を比べなさい。どのようなことがいえるか。
- 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)

落下距離[m]

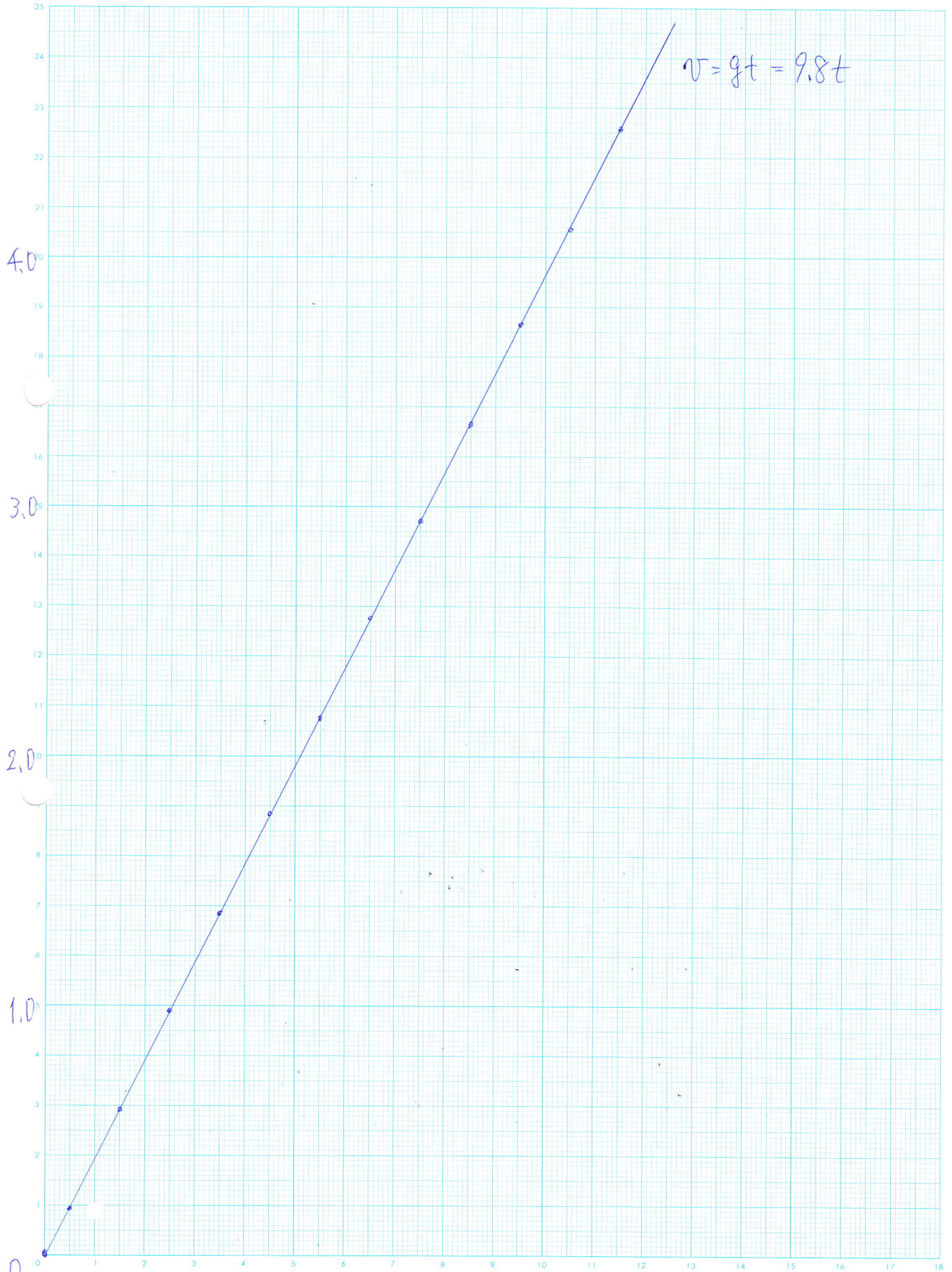


$$x = \frac{g}{2}t^2 = 4.9t^2$$

2E 4E 6E 8E 10E 12E

時刻 [s]

速度 [m/s]



$$v = gt = 9.8t$$