

**特殊相対論 No.10** 速度の合成則

1. 静止している  $K$  系から見て  $v = +0.8c$  で動く物体がある. この物体を  $V = +0.5c$  で動く  $K'$  系から見た速度  $v'$  を求めたい.

(a)  $K, K'$  の座標軸を書き,  $v = +0.8c$  で動く物体の世界線を描きなさい.

(b) 時空図上で  $A(w_A, x_A) = (8, 4), B(w_B, x_B) = (10, 8)$  を定義する.  $OA$  および  $AB$  を実測して,  $\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA}$  を計算しなさい. この量が,  $K'$  系からみた物体の速度となる.

(c) 三角形  $OAB$  に正弦定理をあてはめて, 速度の合成則を求めなさい. 傾きは速度を表すので,  $\tan \theta = \frac{V}{c}, \tan \varphi = \frac{v}{c}$  とする.

(d) 上で求めた式に  $v = +0.8c$  および  $V = +0.5c$  を代入し,  $v'$  を求めなさい.

2. 次の速度の合成を，時空図と合成則の式の両方で求めなさい。

(a) 速さ  $v = +c$  と速さ  $V = +0.5c$  の合成を求めなさい。

(b) 速さ  $v = +0.5c$  と速さ  $V = -0.5c$  の合成を求めなさい。

(c) 光速  $v = +c$  と光速  $V = -c$  の合成を求めなさい。

3. Lorentz 変換の式から，次の問に答えなさい。

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{V}{c^2} x \quad (1)$$

$$x' = -\gamma V t + \gamma x \quad (2)$$

(a) 速度の合成則を求めなさい。  $v' = \frac{dx'}{dt'}$ ，  $v = \frac{dx}{dt}$  である。

(b)  $c \rightarrow \infty$  のとき，Newton 力学での速度の合成則になることを示しなさい。

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)

**特殊相対論 No.10-2** 速度の合成則

1. 速度の合成則  $v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$  から次の問いに答えなさい。  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$  である。

(a)  $\frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma \frac{1-vV/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  となることを示しなさい。

(b)  $\frac{c}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$ ,  $\frac{v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$  を  $c$ ,  $v$ ,  $V$ ,  $\gamma$  で表しなさい。 さらに  $u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ,  $u^1 = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  とおくと,  $(u^0, u^1)$  が  $(w, x)$  と同じ変換となっていることを示しなさい。

2. Lorentz 変換を 2 回続けて行った結果が, また Lorentz 変換になることを示したい.

(a)  $K$  系に対し  $K'$  系が速度  $V$  で動き,  $K'$  系に対して  $K''$  系が速度  $V'$  で動くとき,  $K$  系に対する  $K''$  系の速度を  $V''$  とする.  $V''$  を  $V, V'$  を使って表しなさい.

(b) 上式から

$$\gamma'' = \gamma\gamma' \left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right), \quad \gamma''V'' = \gamma\gamma'(V + V') \quad (3)$$

を示しなさい.

(c) 次の式を証明しなさい.

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'V'/c^2 \\ -\gamma'V' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c^2 \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma''V''/c^2 \\ -\gamma''V'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$