振動運動

1. 単振動

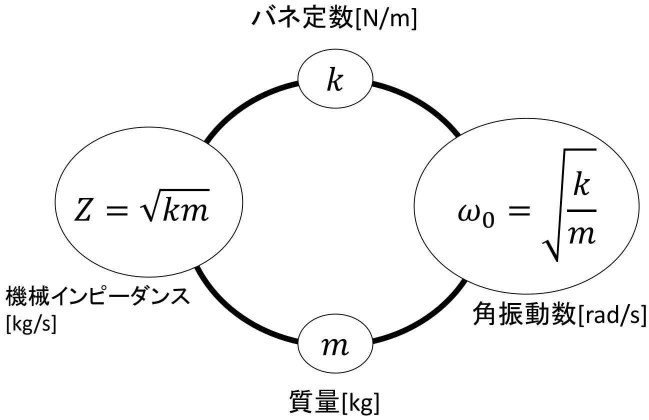
バネ定数 k[N/m] のバネに，質量 m[kg] の物体が取り付けられているときの物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

となる．初期条件（$t=0$ のとき $x=x_0$，$v=v_0$）のもとで，この解は

$$x = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{2}$$

となる．



2. 減衰振動

上記のバネが，速さに比例する摩擦力を受ける．比例定数を 2μ[kg/s] としたときの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2\mu\frac{dx}{dt} \tag{3}$$

初期条件（$t=0$ のとき $x=x_0$，$v=0$）のもとで，この解は以下のようである．

(a) $Z=\sqrt{km}>\mu$ のとき減衰振動

$$x = x_0 e^{-\mu t/m}\left\{\cos\left(t\frac{\sqrt{Z^2-\mu^2}}{m}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{Z^2-\mu^2}}\sin\left(t\frac{\sqrt{Z^2-\mu^2}}{m}\right)\right\} \tag{4}$$

(b) $Z=\sqrt{km}=\mu$ のとき臨界振動

$$x = x_0 e^{-\mu t/m}\left(1+\frac{\mu}{m}t\right) \tag{5}$$

(c) $Z=\sqrt{km}<\mu$ のとき過減衰

$$x = x_0 e^{-\mu t/m}\left\{\cosh\left(t\frac{\sqrt{\mu^2-Z^2}}{m}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-Z^2}}\sinh\left(t\frac{\sqrt{\mu^2-Z^2}}{m}\right)\right\} \tag{6}$$

ここで，次のように定義される関数を双曲線関数という．

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \tag{7}$$

3. 強制振動（摩擦なし）

単振動に $f\cos\omega t$（f は定数）という外力が働くときの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f\cos\omega t \tag{8}$$

となる．この解は $\omega\to\omega_0$ の極限で

$$x=\frac{f}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \tag{9}$$

となり，振幅が時間とともに増大する．これを**共鳴**または**共振**という．

4. 強制振動（摩擦あり）

減衰振動に $f\cos\omega t$（f は定数）という外力が働くときの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2\mu\frac{dx}{dt}+kx=f\cos\omega t \tag{10}$$

となる．この特（別）解は

$$x=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega/m)^2}\frac{f}{m}\cos\omega t+\frac{2\mu\omega/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega/m)^2}\frac{f}{m}\sin\omega t \tag{11}$$

$$=\frac{f/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\mu\omega/m)^2}}\cos(\omega t-\delta) \tag{12}$$

となる．ここで

$$\tan\delta=\frac{2\mu\omega/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{13}$$

である．

ちなみに ⋯ LCR 交流回路では ⋯

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=V_0\sin\omega t \tag{14}$$