番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.15 力学的エネルギー保存則 (2)

1. バネによる力 $F = -kx$ が働くときの運動について考える．運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と書かれている．ここで，$\frac{k}{m} = 1.0\ \mathrm{s}^{-2}$ とする．

(a) 両辺に速さ $v = \frac{dx}{dt}$ をかけて，エネルギー積分を実行しなさい．積分定数を E として，エネルギー保存則を導きなさい．

(b) もう一度 t で積分して，位置 $x(t)$ を求めなさい．積分定数を φ とする．

(c) 三角関数の加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ を使い，上で求めた $x(t)$ が

$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$

となることを示しなさい.

(d) 初期条件 $x(0) = 1$，$v(0) = 0$ より位置 $x(t)$ を求めなさい．(動力学 No.11 問 **3.** 参照)

番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.15-2 力学的エネルギー保存則 (2)

単振動の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{1}$$

を初期条件（$t = 0$ のとき $x_0 = 1$，$v_0 = 0$）のもとで積分すると（動力学 No.11 参照）

$$x = \cos t, \qquad v = -\sin t \tag{2}$$

が得られた．ここで，$m = k = 1$ とした．一方，式 (1) をエネルギー積分して

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2 = E\,(\text{定数}) \tag{3}$$

が得られた．$\epsilon = 0.50$ s として，小数第 4 位を四捨五入して数値を求めた（裏面）．

1. 一枚のミリ方眼紙に，$x - t$，$v - t$，$K - t$，$U - t$ のグラフを描きなさい．

2. 次の問いに答えなさい．

(a) 運動エネルギー $K = \frac{m}{2}v^2$ を時刻 t の関数として表しなさい．

(b) 位置エネルギー $U = \frac{k}{2}x^2$ を時刻 t の関数として表しなさい．

(c) 力学的エネルギー $E = K + U$ を求めなさい．時刻 t を含まない定数となるか？

3. 位置エネルギー $U = \frac{k}{2}x^2$ がエネルギーの単位 J であることを確かめなさい．

時刻 t〔s〕	速さ v〔m/s〕	$\frac{m}{2}v^2$〔J〕	位置 x〔m〕	$\frac{k}{2}x^2$〔J〕	$\frac{m}{2}v^2+\frac{k}{2}x^2$〔J〕
0	0		1.000		
ϵ	-0.479		0.878		
2ϵ	-0.841		0.540		
3ϵ	-0.997		0.071		
4ϵ	-0.909		-0.416		
5ϵ	-0.598		-0.801		
6ϵ	-0.141		-0.990		
7ϵ	0.351		-0.936		
8ϵ	0.757		-0.654		
9ϵ	0.978		-0.211		
10ϵ	0.959		0.284		
11ϵ	0.706		0.709		
12ϵ	0.279		0.960		
13ϵ	-0.215		0.977		
14ϵ	-0.657		0.754		
15ϵ	-0.938		0.347		
16ϵ	-0.989		-0.146		
17ϵ	-0.798		-0.602		
18ϵ	-0.412		-0.911		

4. 一枚のミリ方眼紙に，横軸に x，縦軸に v をとった $v-x$ グラフを描きなさい．

5. 式 (2) を三角関数の公式 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入することによって時刻 t を消去した式を求めなさい．これが問 **4.** のグラフである．