

## 量子力学 No.10

 Time-evolution operator (量子力学 No.5 参照)

- Time-evolution operator  $\mathcal{U}(t)$  の持つべき性質

1. 確率保存:  $\langle \alpha, t | \alpha, t \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle$  より

$$\mathcal{U}^\dagger(t) \mathcal{U}(t) = 1 \quad (1)$$

2. 時間分割

$$\mathcal{U}(t_2, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_1) \mathcal{U}(t_1, t_0) \quad (2)$$

3. 恒等

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \mathcal{U}(t_1, t_0) = \mathcal{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (3)$$

これらの性質を満たすものとして

$$\mathcal{U}(t + dt, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H dt \quad (4)$$

を考える。ここで、 $H$  を Hamiltonian という。こうすれば、性質の (1) と (3) を満たす。性質 (2) から

$$\mathcal{U}(t + dt, t_0) = \mathcal{U}(t + dt, t) \mathcal{U}(t, t_0) = \left( 1 - \frac{i}{\hbar} H dt \right) \mathcal{U}(t, t_0)$$

これより

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t, t_0) = H \mathcal{U}(t, t_0) \quad (5)$$

これを Schrödinger equation for the time-evolution operator という。

- スピン 1/2 の電子が外部磁場  $\mathbf{B}$  と相互作用しているときのハミルトニアンは

$$H = \frac{e}{m_e} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{e\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \equiv \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (6)$$

ここで、

電子の電荷	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
電子の質量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
プランク定数	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
ボーア磁子	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$

である。具体的にハミルトニアンを書くと、

$$H = \mu_B \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。

1.  $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$  のとき

(a) ハミルトニアン  $H$  を行列で表しなさい。このハミルトニアンを  $\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$  を使って書き直しなさい。

(b) 時間発展演算子  $\mathcal{U}_x(t)$  の行列表示を求めなさい。

2.  $\mathbf{B} = (0, B_0, 0)$  のとき

(a) ハミルトニアン  $H$  を行列で表しなさい。このハミルトニアンを  $\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$  を使って書き直しなさい。

(b) 時間発展演算子  $\mathcal{U}_y(t)$  の行列表示を求めなさい。

3.  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  のとき

(a) ハミルトニアン  $H$  を行列で表しなさい。このハミルトニアンを  $\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$  を使って書き直しなさい。

(b) 時間発展演算子  $\mathcal{U}_z(t)$  の行列表示を求めなさい。

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)