§1. Einstein力学

運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F$$

を採用する。

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dv}{dt} + mv\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-(v/c)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)\frac{v}{c}\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\left[\left\{1-(v/c)^2\right\} + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\frac{dv}{dt} = \frac{m}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

一方で. p^0の時間微分は.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = mc\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-(v/c)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}(-2)\frac{v}{c}\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{mv}{c}\frac{1}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{v}{c}\times F$$

したがって.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = v.F$$

ここで. Newton力学と同じようにして. .

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

§2. 相対論的エネルギーと運動量

① エネルギーと運動量の関係

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{m^2c^2}{1-(v/c)^2} - \frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2} = m^2c^2\,\frac{1-(v/c)^2}{1-(v/c)^2} = m^2c^2$$

したがって

$$E = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$$

② 運動量と速さ

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2}$$

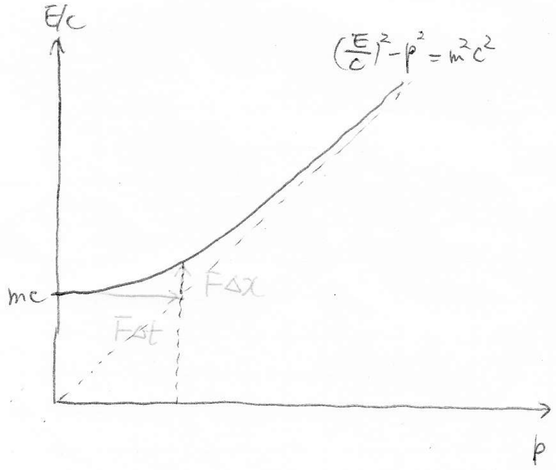
$$p^2 - p^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m^2v^2$$

$$p^2 = \left(\frac{p^2}{c^2}+m^2\right)v^2$$

$$v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m^2c^2} = \frac{p^2c^2}{(E/c)^2} \qquad \therefore\ v = \frac{pc}{E/c} = \frac{pc^2}{E}$$

③ 連立微分方程式を解こう.

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F \\[2mm] \dfrac{dE}{dt} = v\cdot F \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{p(t+\epsilon)-p(t)}{\epsilon} = F \\[2mm] \dfrac{E(t+\epsilon)-E(t)}{\epsilon} = v(t)\cdot F \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} p(t+\epsilon) = p(t) + \epsilon F \\[2mm] E(t+\epsilon) = E(t) + \epsilon F\cdot v(t) = E(t) + \epsilon F\,\dfrac{p(t)c^2}{E(t)} \longrightarrow \dfrac{E(t+\epsilon)}{c} = \dfrac{E(t)}{c} + \epsilon F\,\dfrac{p(t)}{E(t)/c} \end{cases}$$

番号　　　　　　氏名

特殊相対論 No.15

エネルギーと運動量 (特殊相対論 No.4 参照)

$$\begin{cases} p(t+\epsilon) & = p(t) + \epsilon F \\ E(t+\epsilon)/c & = E(t)/c + \epsilon F \frac{p(t)}{E(t)/c} \end{cases} \qquad (1)$$

ここで，$\epsilon = 0.20$ s，$F = 1.0$ N，$m = 1.0$ kg，$c = 1.0$ m/s とする．小数第4位を四捨五入しなさい．

時刻 t〔s〕	エネルギー $E(t)/c$	運動量 $p(t)$	中点運動量 $\overline{p}(t)$
0	$E(0)/c = 1.0$	$p(0) = 0.0$ $p(\frac{\epsilon}{2}) = p(0) + \frac{\epsilon}{2}F = 0.100$	0 とする
ϵ	$1+0,2\times\frac{0,1}{1} = 1,02$	0.300	0,2
2ϵ	$1,02+0,2\times\frac{0,3}{1,02} = 1,079$	0.500	0,4
3ϵ	$1,079+0,2\times\frac{0,5}{1,079} = 1,172$	0.700	0,6
4ϵ	$1,172+0,2\times\frac{0,7}{1,172} = 1,291$	0.900	0,8
5ϵ	$1,291+0,2\times\frac{0,9}{1,291} = 1,430$	1.100	1,0
6ϵ	$1,430+0,2\times\frac{1,1}{1,430} = 1,584$	1.300	1,2
7ϵ	$1,584+0,2\times\frac{1,3}{1,584} = 1,748$	1.500	1,4
8ϵ	$1,748+0,2\times\frac{1,5}{1,748} = 1,920$	1.700	1,6
9ϵ	$1,920+0,2\times\frac{1,7}{1,920} = 2,097$	1.900	1,8
10ϵ	$2,097+0,2\times\frac{1,9}{2,097} = 2,278$	2.100	2,0
11ϵ	$2,278+0,2\times\frac{2,1}{2,278} = 2,462$	2.300	2,2
12ϵ	$2,462+0,2\times\frac{2,3}{2,462} = 2,649$	2.500	2,4
13ϵ	$2,649+0,2\times\frac{2,5}{2,649} = 2,838$	2.700	2,6
14ϵ	$2,838+0,2\times\frac{2,7}{2,838} = 3,028$	2.900	2,8
15ϵ	$3,028+0,2\times\frac{2,9}{3,028}$ $= 3.220$	*****	3.000

1. 縦軸に E/c，横軸に $\overline{p}$ をとった $E/c-\overline{p}$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 特殊相対論では，運動量 p とエネルギー E は，

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2}$$

と表された．さらにエネルギーを運動量で書きなおすと

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

となった．$v \ll c$ のとき，(2) と (3) を展開しなさい．
Hint : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$ ($|x| < 1$ のとき)

(2) $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = mc^2\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\cdots\right\} = mc^2 + \frac{m}{2}v^2+\cdots$

(3) $E = mc^2\left\{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = mc^2\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2+\cdots\right\} = mc^2 + \frac{p^2}{2m}+\cdots$

3. 粒子が静止している $(v = 0)$ ときのエネルギー E は，

$$E = mc^2 \tag{4}$$

と表される．これを**静止エネルギー**という．

(a) 物質 1 g の静止エネルギーは何 J か．

$E = 1\times10^{-3}\cdot(3\times10^8)^2 = 1\times10^{-3}\cdot 9\times10^{16} = 9\times10^{13}$ J

(b) 0°C の水 1 kg を沸騰させるのに 420 kJ のエネルギーが必要とされる．上の静止エネルギーは，水何 kg を沸騰させることができるか．

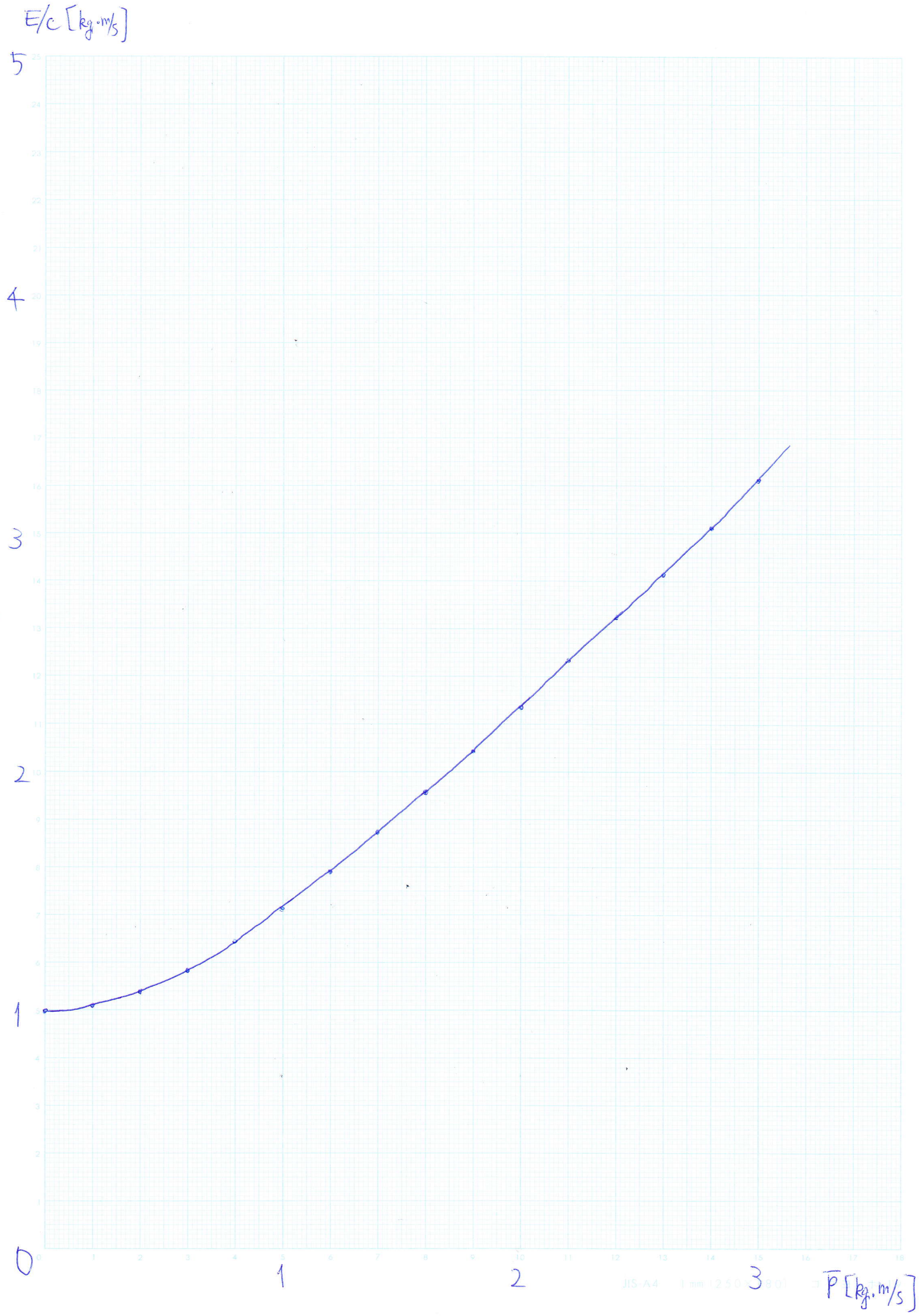
1kg —— 420kJ
$x$kg —— 9×10^{10}kJ

$x = \frac{9\times10^{10}}{420} = 2.1\times10^8$ kg

(c) 電子の質量は $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg である．電子の静止エネルギーは何 MeV か．

$E_e = \frac{9.11\times10^{-31}\cdot(3.0\times10^8)^2}{1.6\times10^{-19}} = 51.2\times10^4$ eV $= 0.512$ MeV

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)


E/c [kg·m/s]
5
4
3
2
1
0
1
2
3
P [kg·m/s]