番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.13

運動方程式を解く (1) 自由落下運動 (動力学 No. 6 参照)

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = & x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = & v(t) + \epsilon g \left\{ 1 - \left(\frac{v(t)}{c} \right)^2 \right\}^{3/2} \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\epsilon = 0.80$ s，$g = 0.25$ m/s^2，$c = 1.0$ m/s とする．

時刻 t 〔s〕	位置 $x(t)$ 〔m〕	速さ $v(t)$ 〔m/s〕
0	$x(0) = 0.0$	$v(0) = 0.0$ $v(\frac{\epsilon}{2}) = v(0) + \frac{\epsilon}{2} g \left\{ 1 - \left(\frac{v(0)}{c} \right)^2 \right\}^{3/2}$
ϵ		
2ϵ		
3ϵ		
4ϵ		
5ϵ		
6ϵ		
7ϵ		
8ϵ		
9ϵ		
10ϵ		
11ϵ		
12ϵ		
13ϵ		
14ϵ		
15ϵ		*****

1. $v-t$ グラフ，$x-t$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 質量 m の物体に一定の力 $F = mg$ が働くときの，物体の運動方程式を解こう．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F = mg \tag{2}$$

(a) t について積分して v を求めなさい．初期条件は $t = 0$ のとき $v = 0$ である．

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mgt + A \text{(積分定数)}$$

初期条件より $A=0$ なので

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mgt$$

v について解くと

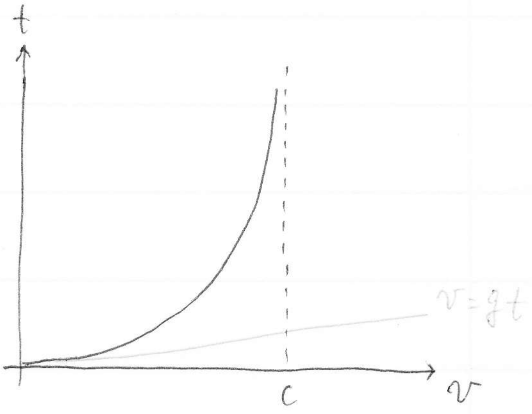
$$\frac{v^2}{1-(v/c)^2} = g^2t^2$$

$$v^2 = g^2t^2\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}$$

$$\left\{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right\} v^2 = g^2t^2$$

+

$$\boxed{v = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}}$$



(b) $v-t$ グラフの概形を描きなさい．

(c) 上の解について，$t \to \infty$ の極限を求めなさい．

$$v = \frac{g}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{g^2}{c^2}}} \longrightarrow \frac{g}{g/c} = c \quad (t\to\infty)$$

(d) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \longrightarrow gt \quad (c\to\infty)$$

3. $v = \frac{dx}{dt}$ より，t について積分して x を求めなさい．初期条件は $t = 0$ のとき $x = 0$ である．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}t^2}}$$

$$x = \int dt\, \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}t^2}} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} + B\ (\text{積分定数})$$

初期条件から $0 = \frac{c^2}{g} + B$ より $B = -\frac{c^2}{g}$

したがって，

$$\boxed{x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g}}$$

$$\frac{g}{c^2}x + 1 = \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}$$

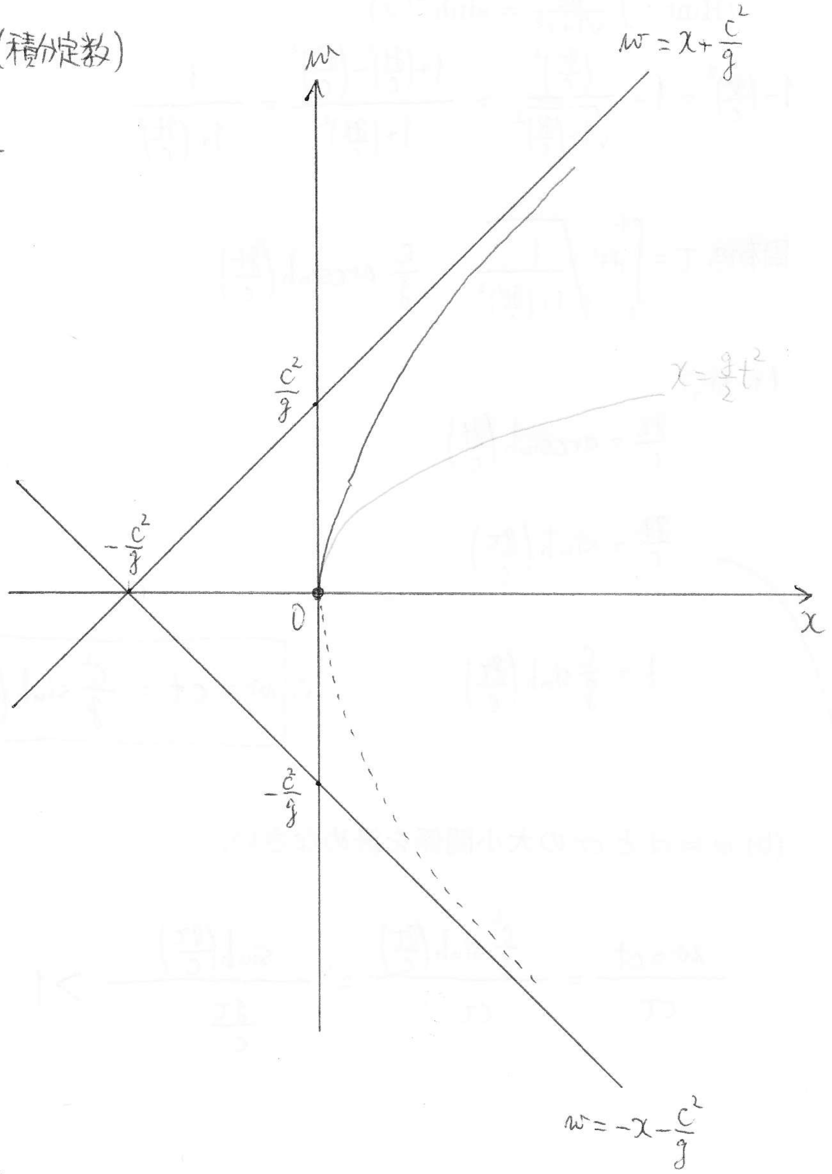
$$\left(\frac{g}{c^2}x+1\right)^2 = 1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2$$

$$\left(\frac{g}{c^2}x+1\right)^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{g}{c^2}x+1+\frac{g}{c}t\right)\left(\frac{g}{c^2}x+1-\frac{g}{c}t\right) = 1$$

$$\frac{g}{c^2}x+1+\frac{g}{c^2}w = 0 \qquad \frac{g}{c^2}x+1-\frac{g}{c^2}w = 0$$

$$w = -x-\frac{c^2}{g} \qquad w = x+\frac{c^2}{g}$$



(a) $x - t$ グラフの概形を描きなさい．

(b) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)

Hint : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots\ (|x| < 1$ のとき)

$$x = \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{g} \fallingdotseq \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{2c^2}\right) - \frac{c^2}{g} = \frac{g}{2}t^2$$

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

5. 問 **2.** の解 $v = \dfrac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$ より

(a) 物体の固有時 $\tau = \displaystyle\int_0^t dt' \sqrt{1-(v/c)^2}$ を計算し，$w = ct$ を τ で表しなさい．

(Hint：$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$)

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\frac{gt}{c}\right)^2}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} = \frac{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2-\left(\frac{gt}{c}\right)^2}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}$$

$$\text{固有時}\ \tau = \int_0^t dt' \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{gt'}{c}\right)^2}} = \frac{c}{g}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{gt}{c}\right)$$

したがって，

$$\frac{g\tau}{c} = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{gt}{c}\right)$$

$$\frac{gt}{c} = \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$$

$$t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \qquad \therefore \boxed{w = ct = \frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}$$

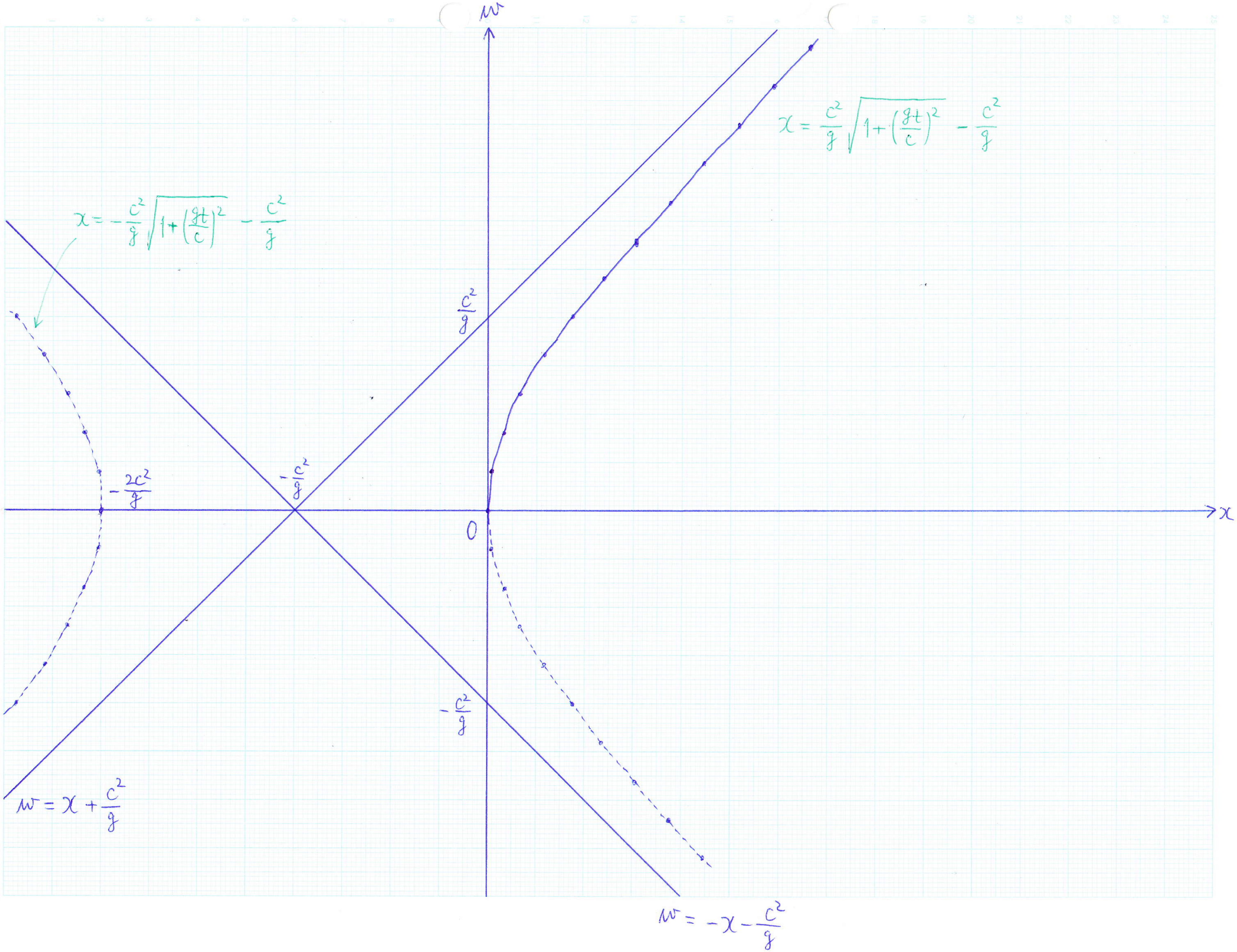
(b) $w = ct$ と $c\tau$ の大小関係を決めなさい．

$$\frac{w=ct}{c\tau} = \frac{\frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}{c\tau} = \frac{\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}{\frac{g\tau}{c}} > 1 \qquad \text{したがって，}\ w > c\tau$$

6. 問 **3.** の解 $x = \dfrac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\dfrac{gt}{c}\right)^2} - \dfrac{c^2}{g}$ を τ で表しなさい．

$$x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)} - \frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{g}$$

$$\left\{\begin{aligned} u^0 &= \frac{dw}{d\tau} = \frac{c^2}{g}\frac{g}{c}\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) = c\times\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \\ u^1 &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{c^2}{g}\frac{g}{c}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) = c\times\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \end{aligned}\right\} \quad -(u^0)^2+(u^1)^2 = -c^2\cosh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)+c^2\sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right) = -c^2$$


w
$x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g}$
$x = -\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g}$
$\frac{c^2}{g}$
$-\frac{2c^2}{g}$
$-\frac{c^2}{g}$
x
0
$-\frac{c^2}{g}$
$w = x + \frac{c^2}{g}$
$w = -x - \frac{c^2}{g}$