

## 特殊相対論 No.12

光の縦ドップラー効果 (特殊相対論 No. 3 参照)

1. 原点に静止した光源から、周期  $T = 1$  s で光を放出する。光は  $x$  軸正方向に  $+c$  すなわち  $\beta = +1$  で進む。波面の様子を、時空図に書き込みなさい。
2. 振動数  $\nu$  [Hz] を求めなさい。

$$VT = 1 \text{ s} \Rightarrow V = \frac{1}{T} = \frac{1}{1}$$

3.  $x$  軸に平行に線を入れると、波面間の距離が波長  $\lambda$  である。  $w$  軸に平行に線を入れると、波面間の距離が周期  $cT$  である。時空図の中で、  $cT$  と  $\lambda$  が読めるか。ここで、  $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\lambda}{cT} = \frac{v}{c}$  となっていることを確かめなさい。
4. 時刻  $t = 0$  s に原点から速さ  $V = +0.5c$  で動く観測者  $K'$  系の座標軸  $w' - x'$  を書き入れなさい。
5. ドップラー効果

- (a)  $K'$  系で5個目の波面が  $w'$  軸と交わる点を B とする。  $K'$  系にいる人が読む時間  $cT'$  を求めなさい。

$$cT' = \frac{OB}{\alpha_r} = \frac{11.20}{1.29} = 8.68$$

- (b) 時間  $cT'$  で5個の波面が来ることから、  $K'$  系の人観測する振動数  $\nu'$  は何 Hz か。

$$\nu' = \frac{5 \text{ 個}}{8.68} = 0.576 \text{ Hz}$$

- (c)  $(w, x) = (5, 0)$  を A として、三角形 OAB に正弦定理を使うことによって、相対論的ドップラー効果の式を導きなさい。

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \cos \theta - \sin \theta$$

一方  $m = 5$  とし

$$OA = m c T = \frac{m c}{\nu}$$

$$OB = m c T' \alpha_r = \frac{m c}{\nu'} \alpha_r$$

したがって、

$$\nu' = (\cos \theta - \sin \theta) \alpha_r \nu = \left( \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \right) \times \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \times \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \times \nu$$

- (d)  $V = +0.5c$ ,  $\nu = 1$  を (c) で求めた式に代入して理論値  $\nu'$  を求めなさい。

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{0.5}{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577 \text{ Hz}$$

6.  $\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu$  において,  $c \rightarrow \infty$  のときの極限を求めなさい.

$$\nu' = (1-\beta)^{\frac{1}{2}} (1+\beta)^{-\frac{1}{2}} \nu \doteq \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \times \nu = (1-\beta) \times \nu = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \times \nu = \frac{c-v}{c} \times \nu$$

7. 時刻  $t = 0$  s に原点から速さ  $V = +0.5c$  で離れていく光源がある. 原点に静止している観測者が観測する光の振動数  $\nu'$  を求めなさい.

(a) 時空図から: 5個の波面が通過する時間を求めることにより計算する.

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{8.69} = 0.575 \text{ Hz}$$

(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{0.5}{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577 \text{ Hz}$$

8. 原点に静止している光源がある. 時刻  $t = 0$  s に  $x = 10$  m から速さ  $V = -0.5c$  で動く  $K'$  系の観測する光の振動数  $\nu'$  を求めなさい.

(a) 時空図から: 5個の波面が通過する時間を求めることにより計算する.

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{3.75/\alpha} = \frac{5\text{個}}{3.75/1.29} = \frac{5 \times 1.29}{3.75} = 1.72 \text{ Hz}$$

(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+0.5}{1-0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{1.5}{0.5}} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ Hz}$$

9. 時刻  $t = 0$  s に  $x = 10$  m から速さ  $V = -0.5c$  で動く光源がある. 原点に静止している観測者が観測する光の振動数  $\nu'$  を求めなさい.

(a) 時空図から: 5個の波面が通過する時間を求めることにより計算する.

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{2.90} = 1.724 \text{ Hz}$$

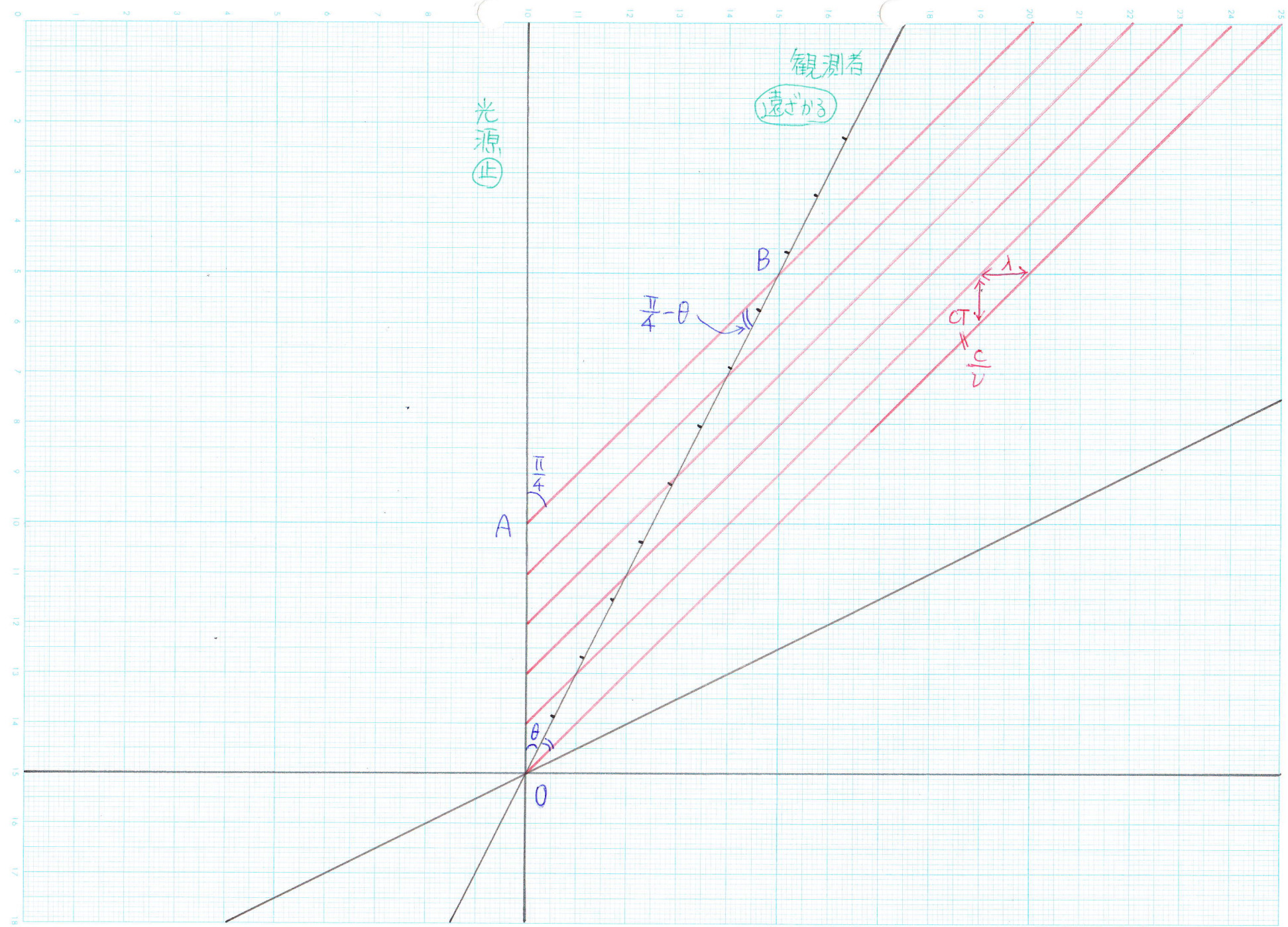
(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+0.5}{1-0.5}} = \sqrt{\frac{1.5}{0.5}} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ Hz}$$

10. かんむり座は地球から 8.6 億光年にある銀河団である. 赤方偏移  $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = 0.0721$  とすると, 光速の何倍で地球から遠ざかっているか.

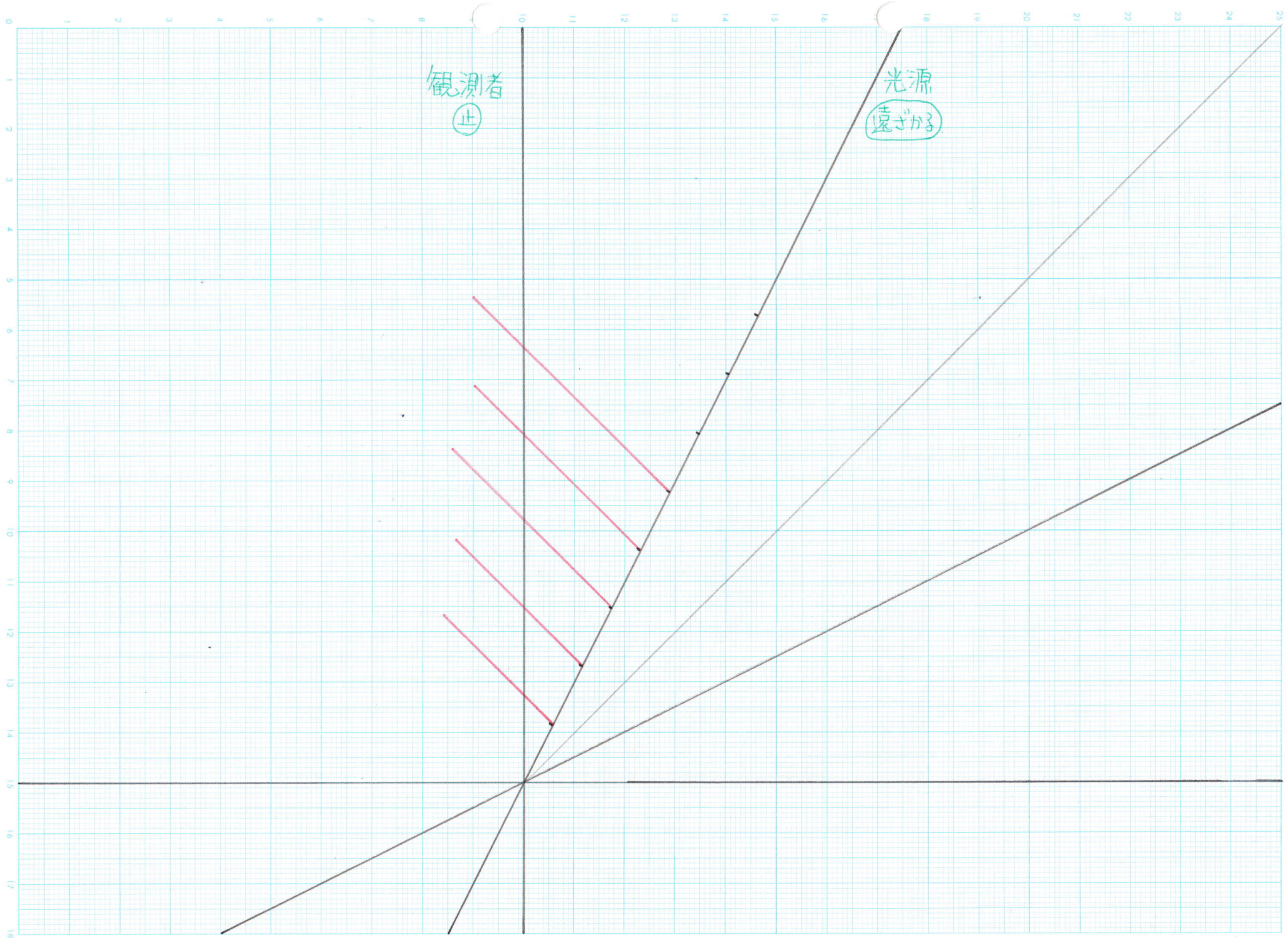
$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1+z} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{より} \quad \beta = 0.0695$$

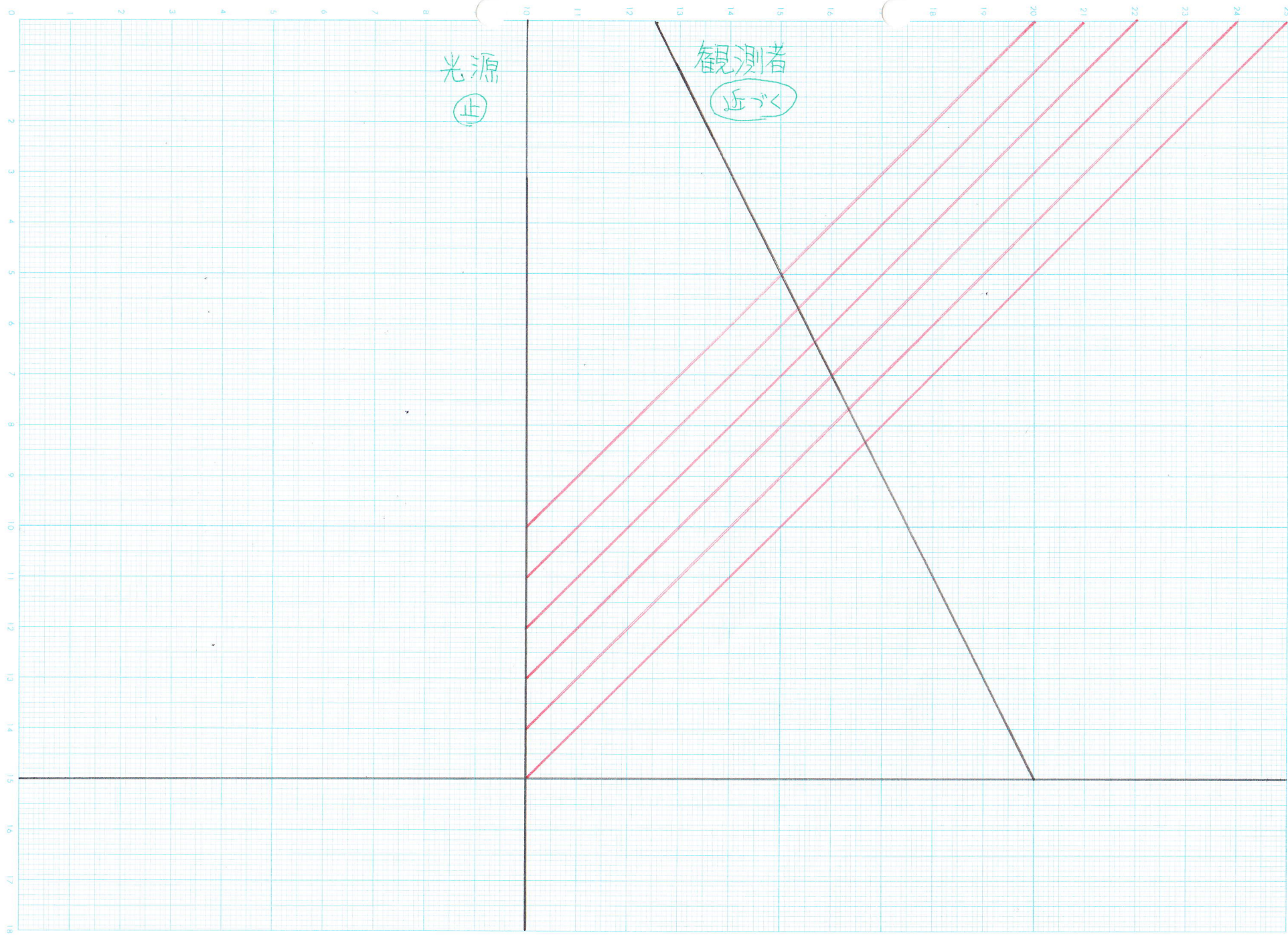
11. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)



観測者  
止

光源  
遠ざかる





9

