

特殊相対論 No.11 速度の合成則 (特殊相対論 No. 2 参照)

1. 静止している K 系から見て $v = +0.8c$ で動く物体がある. この物体を $V = +0.5c$ で動く K' 系から見た速さ v' を求めたい.

(a) K, K' の座標軸を書き, $v = +0.8c$ で動く物体の世界線を描きなさい.

(b) 時空図上で $A(w_A, x_A) = (8, 4), B(w_B, x_B) = (10, 8)$ を定義する. OA および AB を実測して, $\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA}$ を計算しなさい. この量が, K' 系から見た物体の速さとなる.

$$\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA} = \frac{4.50}{8.93} \approx 0.504$$

(c) 三角形 OAB に正弦定理をあてはめて, 速度の合成則を求めなさい. 傾きは速さを表すので, $\tan \theta = \frac{v}{c}, \tan \varphi = \frac{V}{c}$ とする.

$$\begin{aligned} \frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA} &= \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos(\varphi + \theta)} = \frac{\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta} \\ &= \frac{\tan \varphi - \tan \theta}{1 - \tan \varphi \tan \theta} = \frac{\frac{V}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{vV}{c^2}} \end{aligned}$$

したがって,

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

(d) 上で求めた式に $v = +0.8c$ および $V = +0.5c$ を代入し, v' を求めなさい.

$$v' = \frac{0.8c - 0.5c}{1 - 0.8 \times 0.5} = \frac{0.3c}{0.6} = 0.5c$$

2. 次の速度の合成を，時空図と合成則の式の両方で求めなさい。

(a) 速さ $v = +c$ と速さ $V = +0.5c$ の合成を求めなさい。

$$v' = \frac{c - 0.5c}{1 - 1 \times 0.5} = \frac{0.5c}{0.5} = c$$

(b) 速さ $v = +0.5c$ と速さ $V = -0.5c$ の合成を求めなさい。

$$v' = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + 0.5 \times 0.5} = \frac{c}{1.25} = 0.8c$$

時空図では

$$\frac{v'}{c} = \frac{AP}{OA} = \frac{8.93}{11.19} = 0.798$$

(c) 光速 $v = +c$ と光速 $V = -c$ の合成を求めなさい。

$$v' = \frac{c + c}{1 + 1} = \frac{2c}{2} = c$$

3. Lorentz 変換の式から，次の間に答えなさい。

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{V}{c^2} x \quad (1)$$

$$x' = -\gamma V t + \gamma x \quad (2)$$

(a) 速度の合成則を求めなさい。 $v' = \frac{dx'}{dt'}$ ， $v = \frac{dx}{dt}$ である。

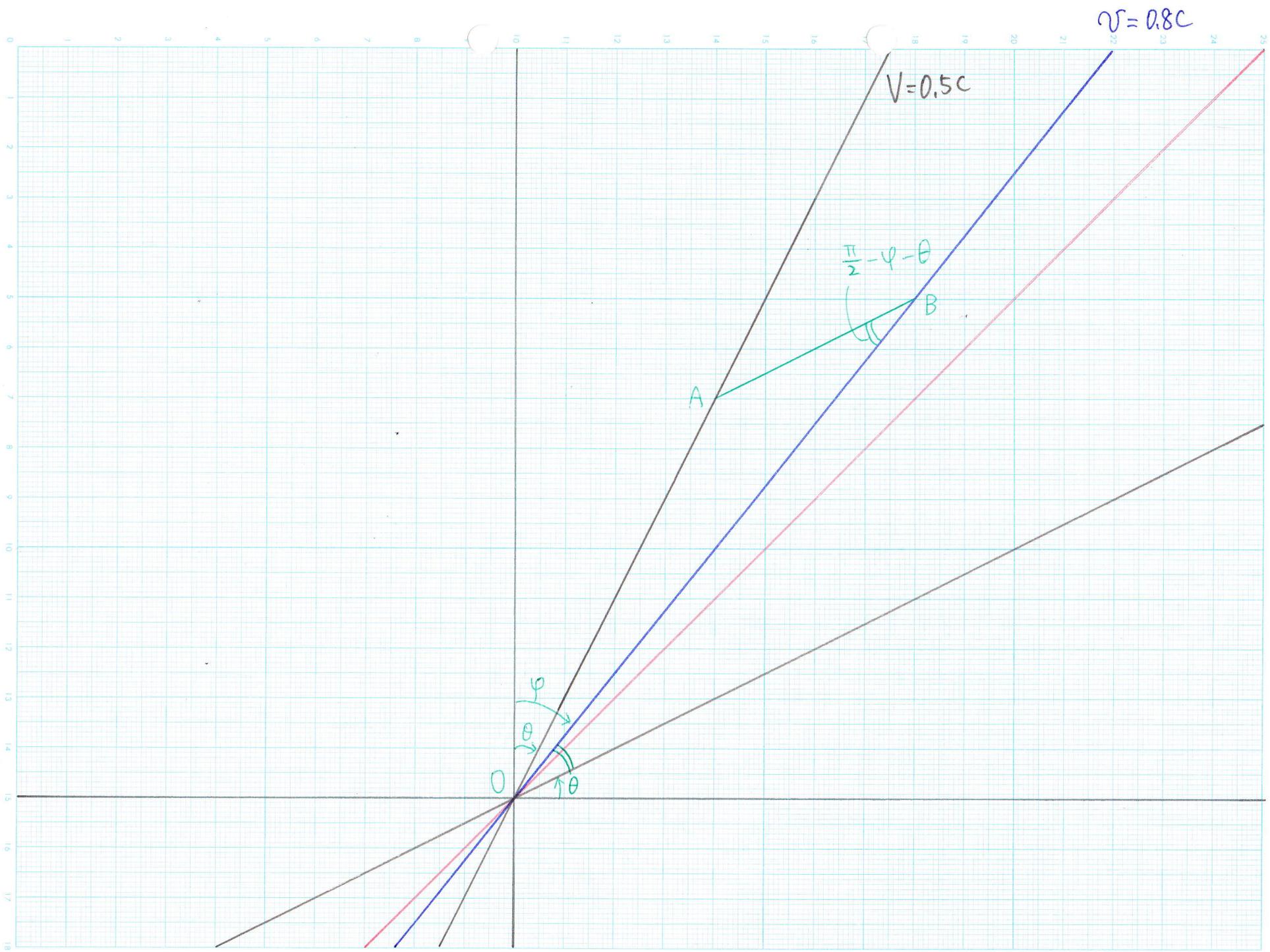
$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{-\gamma V dt + \gamma dx}{\gamma dt - \gamma \frac{V}{c^2} dx} = \frac{-\gamma V + \gamma \frac{dx}{dt}}{\gamma - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{-V + v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

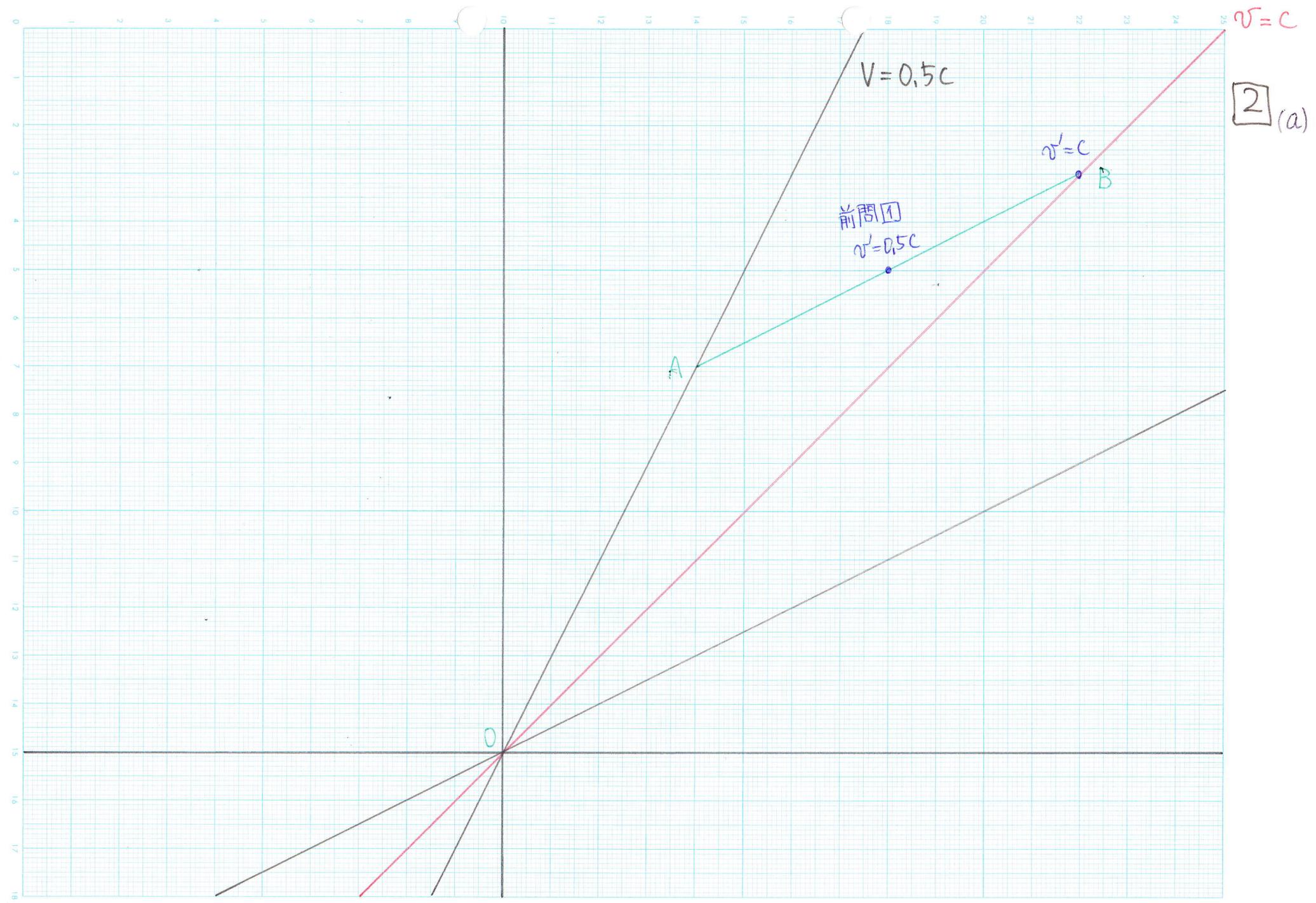
(b) $c \rightarrow \infty$ のとき，Newton 力学での速度の合成則になることを示しなさい。

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \rightarrow v - V \quad (c \rightarrow \infty)$$

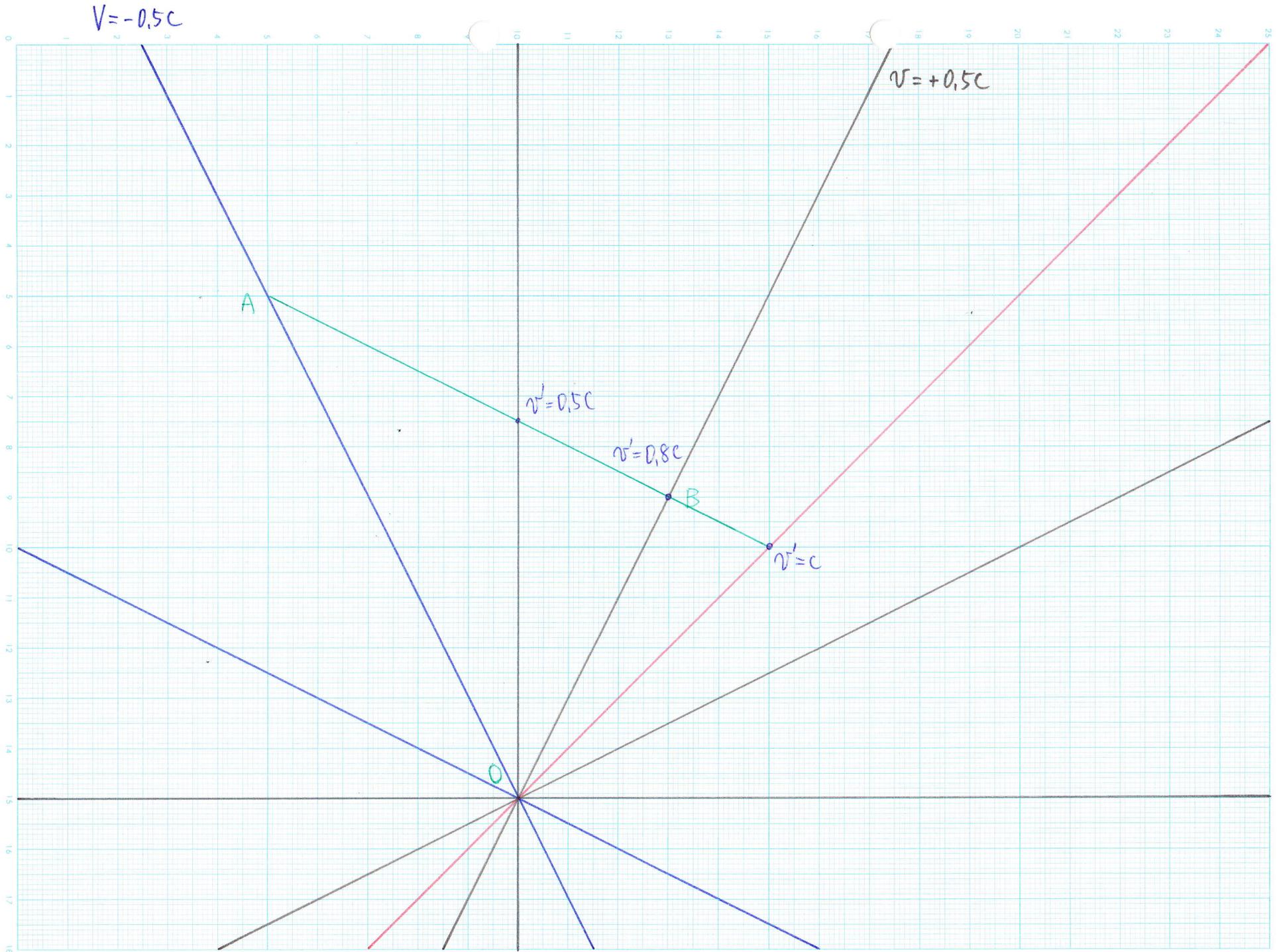
4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)

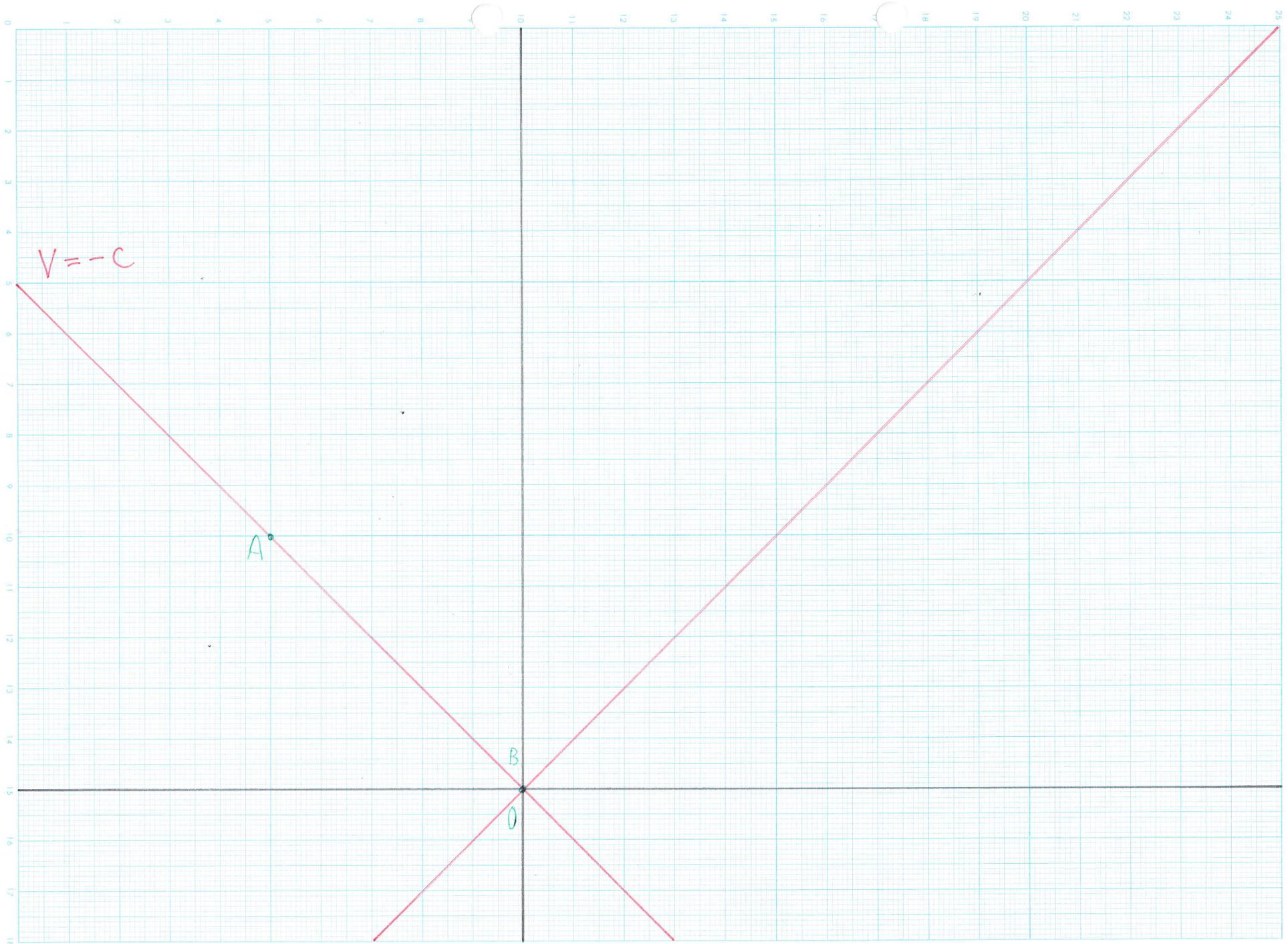
1





2 (a)





$v = c$

$\boxed{2}$ (c)

$V = -C$

A

B

O

特殊相対論 No.11-2 速度の合成則

1. 速度の合成則 $v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$ から次の問いに答えなさい。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ である。

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma \frac{1-vV/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ となることを示しなさい。

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{v-V}{1-vV/c^2}\right)^2 = \frac{1}{(1-vV/c^2)^2} \left\{ \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v}{c} - \frac{V}{c}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(1-vV/c^2)^2} \left\{ 1 - \frac{2vV}{c^2} + \frac{v^2V^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2vV}{c^2} - \frac{V^2}{c^2} \right\} \\ &= \frac{1}{(1-vV/c^2)^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}} = \gamma \frac{1 - vV/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

(b) $\frac{c}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$, $\frac{v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$ を c , v , V , γ で表しなさい。さらに $u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $u^1 = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ とおくと, (u^0, u^1) が (w, x) と同じ変換となっていることを示しなさい。

$$\frac{c}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \gamma \frac{V}{c} \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma u^0 - \gamma \beta u^1$$

$$\begin{aligned} \frac{v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} &= \gamma \frac{1-vV/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \times \frac{v-V}{1-vV/c^2} = \gamma \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \gamma \frac{V}{c} \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= \gamma u^1 - \gamma \beta u^0 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma u^0 - \gamma \beta u^1 \\ -\gamma \beta u^0 + \gamma u^1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma w^0 - \beta \gamma x \\ -\beta \gamma w^0 + \gamma x \end{pmatrix}$$

2. Lorentz 変換を2回続けて行った結果が、また Lorentz 変換になることを示しなさい。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} t'' \\ x'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma' \frac{V'}{c^2} \\ -\gamma' V' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma' \frac{V'}{c^2} \\ -\gamma' V' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{V}{c^2} \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma\gamma' + \gamma\gamma' \frac{VV'}{c^2} & -\gamma\gamma' \frac{V+V'}{c^2} \\ -\gamma\gamma'(V+V') & \gamma\gamma' \frac{VV'+1}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma'' \frac{V''}{c^2} \\ -\gamma'' V'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

一方、速度の合成則 $V'' = \frac{V+V'}{1+\frac{VV'}{c^2}}$ より $\beta'' = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}$ となる。

$$\begin{aligned}
 1-\beta''^2 &= 1-\left(\frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right)^2 \\
 &= \frac{1+2\beta\beta'+\beta^2\beta'^2-\beta^2-2\beta\beta'+\beta'^2}{(1+\beta\beta')^2} \\
 &= \frac{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}{(1+\beta\beta')^2} = \frac{1}{\gamma\gamma'(1+\beta\beta')^2}
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta''^2}} = \gamma\gamma'(1+\beta\beta') = \gamma\gamma'\left(1+\frac{VV'}{c^2}\right) \\
 &= \gamma\gamma' \frac{\beta+\beta'}{\beta''}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \beta'' \gamma'' = \gamma\gamma'(\beta+\beta')$$