

特殊相対論 No. 9 Lorentz 収縮, 時計の遅れ

1. K 系に静止している長さ $l = 5 \text{ m}$ の棒がある. 棒の端の位置の 2 点は, それぞれ $(w_A, x_A) = (0, 0)$, $(w_B, x_B) = (0, 5)$ である. この棒を $V = \frac{c}{2}$ で走っている K' 系から見たときの長さ l' を求めよう.

(a) 時空図を描き, K 系で静止している棒の世界線を描きなさい. 世界線が x' 軸と交わる 2 点 A' , B' を示し, グラフから $l' = x'_B - x'_A$ を読みとりなさい.

$$l' = \frac{5.62}{1.29} = \frac{5.62}{1.29} = 4.36$$

または

$$l' = \frac{5}{\gamma} = \frac{5}{1.15} = 4.35$$

(b) Lorentz 逆変換の式から, $l' = x'_B - x'_A$ を l で表しなさい. ($w'_A = w'_B$ で測定する.)

$$l = x_B - x_A = \beta \gamma w'_B + \gamma x'_B - \beta \gamma w'_A - \gamma x'_A = \gamma (x'_B - x'_A)$$

したがって

$$l' = x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A}{\gamma} = \frac{l}{\gamma} = l \sqrt{1 - \beta^2}$$

2. $V = \frac{c}{2}$ で動いている K' 系に静止している長さ $l' = 5 \text{ m}$ の棒がある. 棒の端の位置の 2 点は, それぞれ $(w'_A, x'_A) = (0, 0)$, $(w'_B, x'_B) = (0, 5)$ である. この棒を静止している K 系から見たときの長さ l を求めよう.

(a) 時空図を描き, K' 系で静止している棒の世界線を描きなさい. 世界線が x 軸と交わる 2 点 A , B を示し, グラフから $l = x_B - x_A$ を読みとりなさい.

グラフの B 点を読みとり,

$$l = 4.35$$

(b) Lorentz 変換の式から, $l = x_B - x_A$ を l' で表しなさい. ($w_A = w_B$ で測定する.)

$$l = x_B - x_A = -\beta \gamma w'_B + \gamma x'_B + \beta \gamma w'_A - \gamma x'_A = \gamma (x'_B - x'_A)$$

したがって

$$l = x_B - x_A = \frac{x'_B - x'_A}{\gamma} = \frac{l'}{\gamma} = l' \sqrt{1 - \beta^2}$$

3. K 系の原点で静止している時計が $T = 5$ 光秒を刻む。時空上では $(w_A, x_A) = (0, 0)$, $(w_B, x_B) = (5, 0)$ である。この時間間隔を $V = \frac{c}{2}$ で走っている K' 系から見たときの時間間隔 T' を求めよう。

(a) 時空図を描き、 K 系の同時刻の世界線を描きなさい。世界線が w' 軸と交わる 2 点 A' , B' を示し、グラフから $T' = w'_B - w'_A$ を読みとりなさい。

$$T' = \frac{5.62}{\alpha_r} = \frac{5.62}{1.29} = 4.36$$

または

$$T' = \frac{5}{\gamma} = \frac{5}{1.15} = 4.35$$

(b) Lorentz 逆変換の式から、 $T' = w'_B - w'_A$ を T で表しなさい。 ($x'_A = x'_B$ で測定する。)

$$T = w_B - w_A = \gamma w'_B + \beta \gamma x'_A - (\gamma w'_A - \beta \gamma x'_A) = \gamma (w'_B - w'_A)$$

したがって

$$T' = w'_B - w'_A = \frac{w_B - w_A}{\gamma} = \frac{T}{\gamma} = T \sqrt{1 - \beta^2}$$

4. $V = \frac{c}{2}$ で動いている K' 系の原点に静止している時計が $T' = 5$ 光秒を刻む。時空上では $(w'_A, x'_A) = (0, 0)$, $(w'_B, x'_B) = (5, 0)$ である。この時間間隔を静止している K 系から見たときの時間間隔 T を求めよう。

(a) 時空図を描き、 K' 系の同時刻の世界線を描きなさい。世界線が w 軸と交わる 2 点 A , B を示し、グラフから $T = w_B - w_A$ を読みとりなさい。

グラフの B 点を読みとり

$$T = 4.35$$

(b) Lorentz 変換の式から、 $T = w_B - w_A$ を T' で表しなさい。 ($x_A = x_B$ で測定する。)

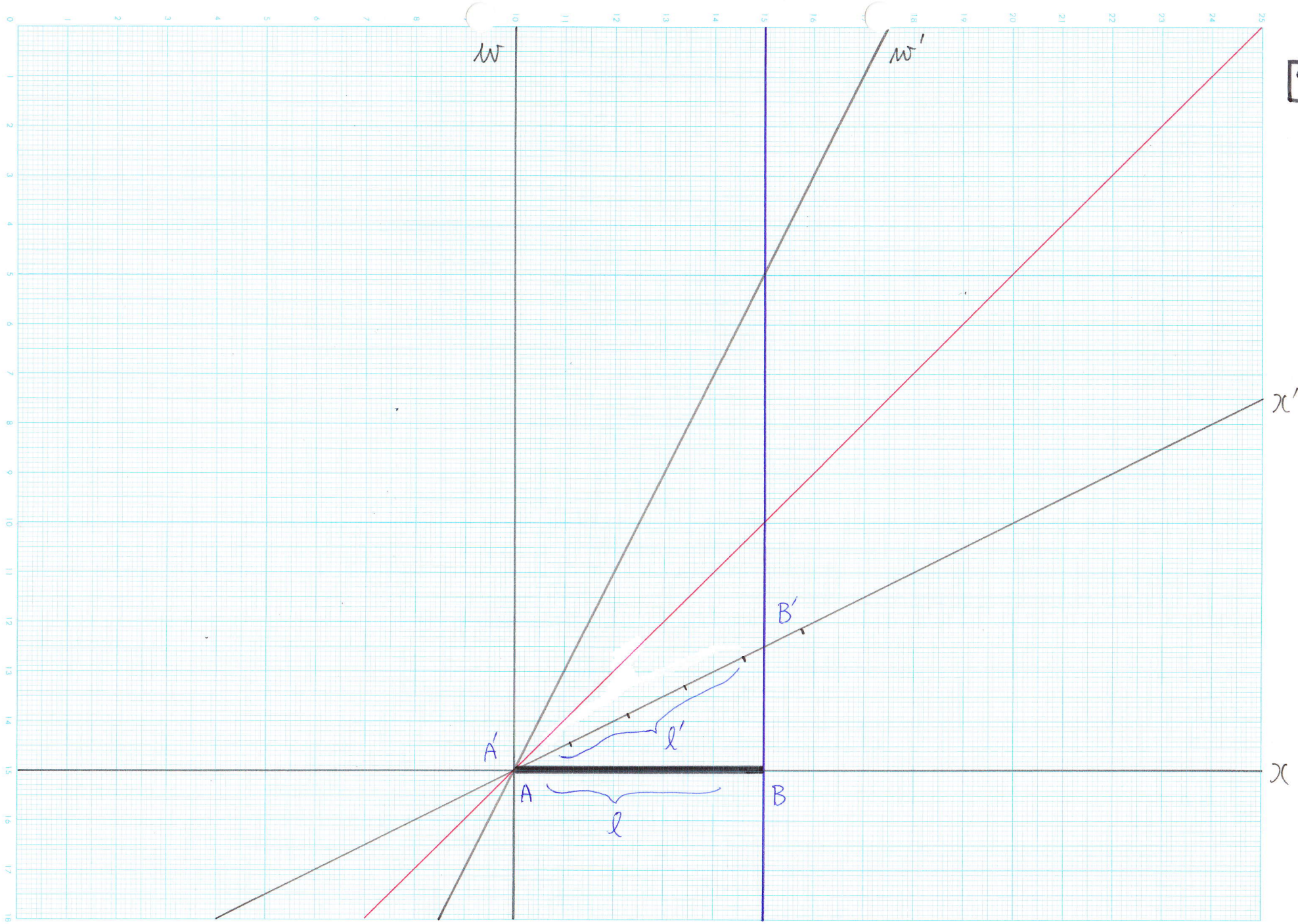
$$T = w_B - w_A = \gamma w'_B - \beta \gamma x'_B - (\gamma w'_A + \beta \gamma x'_A) = \gamma (w'_B - w'_A)$$

したがって

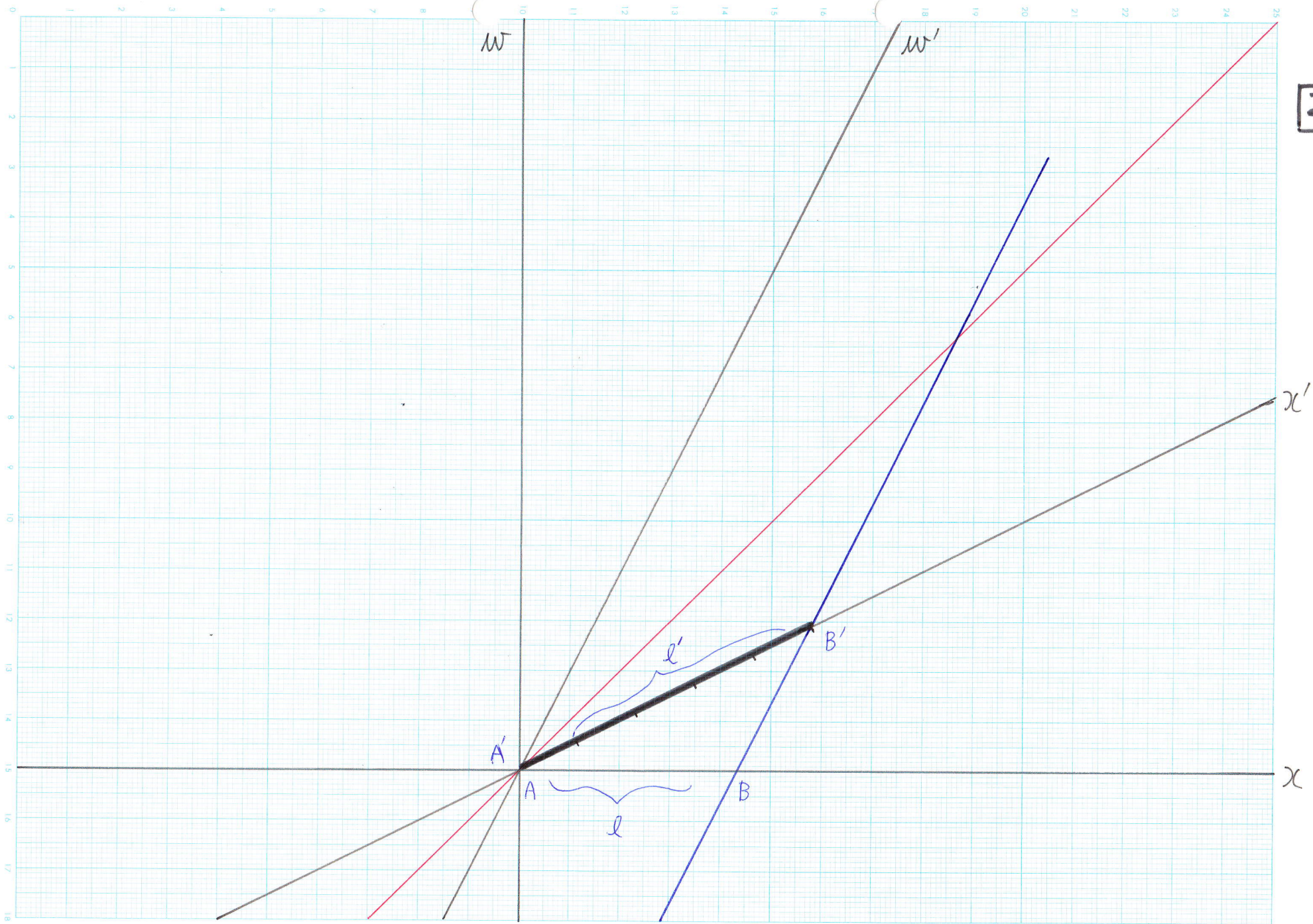
$$T = w_B - w_A = \frac{w'_B - w'_A}{\gamma} = \frac{T'}{\gamma} = T' \sqrt{1 - \beta^2}$$

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい。(自由記載)

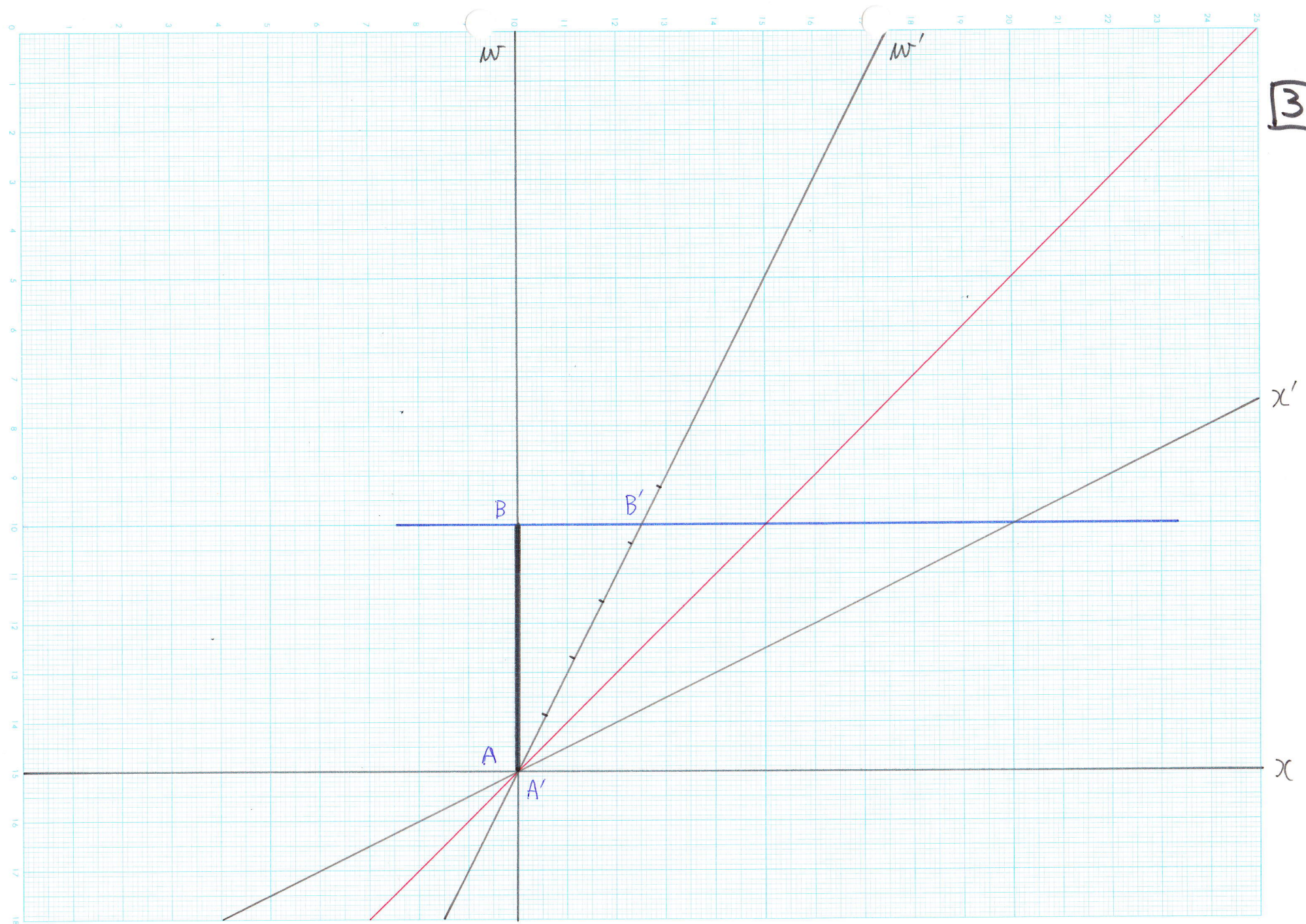
1



2



3



4

