番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.5 Lorentz transformation

1. 慣性系の間の変換を

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

と仮定し，

$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2 \tag{2}$$

を満たすような A，B，C，D を決定しなさい．以下の条件も考慮する．

(a) K' 系は速さ V で走っていることから，$x' = 0 = Ct + Dx$ より，$\frac{dx}{dt} = -\frac{C}{D} = V$ である．

$C = -DV$

(b) $V = 0$ のときは，$A = D = 1$，$B = C = 0$ となる．

(2) 式に (1) を代入する。

$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2(At + Bx)^2 + (Ct + Dx)^2$$

$$= -c^2(A^2t^2 + 2ABtx + B^2x^2) + (C^2t^2 + 2CDtx + D^2x^2)$$

$$= (-c^2A^2 + C^2)t^2 - 2(c^2AB - CD)tx + (-c^2B^2 + D^2)x^2$$

したがって

$$\begin{cases} -c^2A^2 + C^2 = -c^2 \xrightarrow{(a)} -c^2A^2 + D^2V^2 = -c^2 \cdots ① \\ c^2AB - CD = 0 \xrightarrow{(a)} c^2AB + D^2V = 0 \longrightarrow D^2 = -\frac{c^2}{V}AB \cdots ② \\ -c^2B^2 + D^2 = 1 \cdots ③ \end{cases}$$

② を ① に代入 $\longrightarrow A(A + BV) = 1 \cdots ④$

② を ③ に代入 $\longrightarrow -c^2B(BV + A) = V \cdots ⑤$

$$-\frac{A}{c^2B} = \frac{1}{V} \qquad \therefore B = -\frac{V}{c^2}A \cdots ⑥$$

⑥ を ④ に戻して

$$A^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 \qquad \therefore A = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

よって ⑥ より

$$B = \frac{-V/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

② から

$$D^2 = -\frac{c^2}{V}\frac{-\frac{V}{c^2}}{1 - (V/c)^2} \qquad \therefore D = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

(a) より

$$C = -\frac{V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

2. 表面の結果から，

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

とかけることがわかった．

(a) 行列式が 1 となることを示しなさい．

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1-(V/c)^2} - \frac{V^2/c^2}{1-(V/c)^2} = 1$$

(b) 式 (3) を t，x について解き，Lorentz 変換の逆変換を求めなさい．逆行列を求めてもよい．

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{V/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ \frac{V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

(c) $c \to \infty$ のとき，Galilei 変換になることを示しなさい．(特殊相対論 No.1 **4.** 参照)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)