

特殊相対論 No.2 速度の合成則 (特殊相対論 No.11 参照)

1. 静止系 K からの観測

(a) 静止系 K から見て、速さ V で動く座標系 K' の原点 X および速さ v で動く物体の位置 x を求め、以下の表を完成させなさい。

t [s]	X [m]	V [m/s]	x [m]	v [m/s]
0	0	+0.5	0	+1
1	0.5		1	
2	1		2	
3	1.5		3	
4	2		4	
5	2.5		5	
6	3		6	
7	3.5		7	
8	4		8	
9	4.5		9	
10	5		10	

(b) 縦軸に K 系の時刻 t 、横軸に K 系からみた位置 x 、 X をとって、上の表をグラフに描きなさい。傾きは速さを表すので、以下では $\tan\theta = V$ 、 $\tan\varphi = v$ としよう。

2. 速さ V で動く K' 系からの観測

(a) 速さ V で動いている系 K' から見て、 K 系の位置 x_K と物体の位置 x' 、およびそれぞれの速さ v'_K 、 v' を求め、以下の表を完成させなさい。

t' [s]	x'_K [m]	v'_K [m/s]	x' [m]	v' [m/s]
0	0	-0.5	0	+0.5
1	-0.5		0.5	
2	-1		1	
3	-1.5		1.5	
4	-2		2	
5	-2.5		2.5	
6	-3		3	
7	-3.5		3.5	
8	-4		4	
9	-4.5		4.5	
10	-5		5	

(b) 2. の表の値を、1. で描いたグラフの中から読み込むために K' 系の世界線上に時刻 t' の目盛をとりなさい。

3. 2つの座標系から見た物体の速さ v 、 v' の関係式 (速度の合成則) を求めなさい。

$$v' = v - V$$

4. (速度の合成則) $t-x$ 座標系で, $O(0, 0)$, $P(10, 10)$, $Q(10, 5)$ とする.

(a) K' 系から見た物体の速さ v' をグラフから読み取りなさい.

$$v' = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = +0.5$$

(b) 三角形 OPQ に対して正弦定理を使うことによって, $v' = \frac{PQ}{OQ}$ を計算し, 速度の合成則を導出しなさい.

$$\frac{OQ}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{PQ}{\sin(\varphi - \theta)}$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta}{\sin\frac{\pi}{2} \cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2} \sin\varphi} = \frac{\sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta}{\cos\varphi} = \frac{v}{\sqrt{1+V^2}} - \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}$$

一方,

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{x'}{t\sqrt{1+V^2}} = \frac{v'}{\sqrt{1+V^2}}$$

したがって,

$$v' = v - V$$

5. Galilei 変換の式は

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases} \quad (1)$$

と書くことができる.

(a) 式(1)から, 速度の合成則を導きなさい. $v' = \frac{dx'}{dt'}$ を計算する.

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V = v - V$$

(b) もう一度で微分することにより, 加速度を求めなさい. $a' = \frac{dv'}{dt'}$ を計算する. Newton の運動方程式は, Galilei 変換に対して不変であるか.

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{d}{dt}(v - V) = \frac{dv}{dt} = a \dots \text{加速度は変化する。したがって, Newton の運動方程式は Galilei 変換に対して不変である。}$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

