

**特殊相対論 No.2** 速度の合成則 (特殊相対論 No.11 参照)

1. 静止系  $K$  からの観測

(a) 静止系  $K$  から見て、速さ  $V$  で動く座標系  $K'$  の原点  $X$  および速さ  $v$  で動く物体の位置  $x$  を求め、以下の表を完成させなさい。

| $t$ [s] | $X$ [m] | $V$ [m/s] | $x$ [m] | $v$ [m/s] |
|---------|---------|-----------|---------|-----------|
| 0       | 0       | +0.5      | 0       | +1        |
| 1       | 0.5     |           | 1       |           |
| 2       | 1       |           | 2       |           |
| 3       | 1.5     |           | 3       |           |
| 4       | 2       |           | 4       |           |
| 5       | 2.5     |           | 5       |           |
| 6       | 3       |           | 6       |           |
| 7       | 3.5     |           | 7       |           |
| 8       | 4       |           | 8       |           |
| 9       | 4.5     |           | 9       |           |
| 10      | 5       |           | 10      |           |

(b) 縦軸に  $K$  系の時刻  $t$ 、横軸に  $K$  系からみた位置  $x$ 、 $X$  をとって、上の表をグラフに描きなさい。傾きは速さを表すので、以下では  $\tan \theta = V$ 、 $\tan \varphi = v$  としよう。

2. 速さ  $V$  で動く  $K'$  系からの観測

(a) 速さ  $V$  で動いている系  $K'$  から見て、 $K$  系の位置  $x'_K$  と物体の位置  $x'$ 、およびそれぞれの速さ  $v'_K$ 、 $v'$  を求め、以下の表を完成させなさい。

| $t'$ [s] | $x'_K$ [m] | $v'_K$ [m/s] | $x'$ [m] | $v'$ [m/s] |
|----------|------------|--------------|----------|------------|
| 0        | 0          | -0.5         | 0        | +0.5       |
| 1        | -0.5       |              | 0.5      |            |
| 2        | -1         |              | 1        |            |
| 3        | -1.5       |              | 1.5      |            |
| 4        | -2         |              | 2        |            |
| 5        | -2.5       |              | 2.5      |            |
| 6        | -3         |              | 3        |            |
| 7        | -3.5       |              | 3.5      |            |
| 8        | -4         |              | 4        |            |
| 9        | -4.5       |              | 4.5      |            |
| 10       | -5         |              | 5        |            |

(b) 2. の表の値を、1. で描いたグラフの中から読み込むために  $K'$  系の世界線上に時刻  $t'$  の目盛をとりなさい。

3. 2つの座標系から見た物体の速さ  $v$ 、 $v'$  の関係式 (速度の合成則) を求めなさい。

$$v' = v - V$$

4. (速度の合成則)  $t-x$  座標系で,  $O(0, 0)$ ,  $P(10, 10)$ ,  $Q(10, 5)$  とする.

(a)  $K'$  系から見た物体の速さ  $v'$  をグラフから読み取りなさい.

$$v' = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = +0.5$$

(b) 三角形  $OPQ$  に対して正弦定理を使うことによって,  $v' = \frac{PQ}{OQ}$  を計算し, 速度の合成則を導出しなさい.

$$\frac{OQ}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{PQ}{\sin(\varphi - \theta)}$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta}{\sin\frac{\pi}{2} \cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2} \sin\varphi} = \frac{\sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta}{\cos\varphi} = \tan\varphi \cos\theta - \sin\theta = \frac{v}{\sqrt{1+V^2}} - \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}$$

一方,

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{x'}{t\sqrt{1+V^2}} = \frac{v'}{\sqrt{1+V^2}}$$

したがって,

$$v' = v - V$$

5. Galilei 変換の式は

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - Vt \end{cases} \quad (1)$$

と書くことができる.

(a) 式(1)から, 速度の合成則を導きなさい.  $v' = \frac{dx'}{dt'}$  を計算する.

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V = v - V$$

(b) もう一度で微分することにより, 加速度を求めなさい.  $a' = \frac{dv'}{dt'}$  を計算する. Newton の運動方程式は, Galilei 変換に対して不変であるか.

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{d}{dt}(v - V) = \frac{dv}{dt} = a \dots \text{加速度は変化する。したがって, Newton の運動方程式は Galilei 変換に対して不変である。}$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

