番号　　　　　　　　氏名

数学的準備 No.9 微分・積分 (2) オイラーの公式

1. 関数 $f(x)$ の $x=a$ 付近でのテイラー展開は,

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x-a)^3 \\
&+ \frac{1}{4!}f^{(4)}(x-a)^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(x-a)^5 + \cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と書くことができる．特に，$a=0$ のときをマクローリン展開という．

2. 次の関数のマクローリン展開を求めなさい．

(a) e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

(b) $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(c) $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

3. e^{ix} を計算することにより，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を導きなさい．i は虚数であり，$i^2=-1$ である．

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos x + i\sin x$$