

動力学 No.7 運動方程式を解く (2) 雨滴の運動

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) = v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

ここで、 $a(t) = g - \frac{k}{m}v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)$ とする。また、 $\epsilon = 0.40 \text{ s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\frac{k}{m} = 1.0 \text{ s}^{-1}$ とし、小数第4位を四捨五入しなさい。

時刻 t [s]	位置 $x(t)$ [m]	速さ $v(t)$ [m/s]	加速度 $a(t)$ [m/s ²]
0	$x(0) = 0.0$	$v(0) = 0.0$	$a(0) = 9.8$
ϵ	0.78	$v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= 1.960$	7.84
2ϵ	2.82	5.096	4.704
3ϵ	5.61	6.978	2.822
4ϵ	8.86	8.107	1.643
5ϵ	12.37	8.784	1.016
6ϵ	16.05	9.190	0.610
7ϵ	19.82	9.434	0.366
8ϵ	23.65	9.580	0.220
9ϵ	27.52	9.668	0.132
10ϵ	31.41	9.721	0.079
11ϵ	35.31	9.753	0.047
12ϵ	39.22	9.772	0.028
13ϵ	43.13	9.783	0.017
14ϵ	47.05	$= 9.790$ *****	$= 0.01$

1. $v-t$ グラフ, $a-t$ グラフを一枚のグラフ用紙に描きなさい.
2. 日常生活の中で, $v-t$ グラフ・ $a-t$ グラフと同じ振る舞いをする現象をあげ, 説明しなさい.

3. Newton の運動方程式

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (1)$$

を t で積分することによって, v を求めなさい. いま, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\frac{k}{m} = 1.0 \text{ s}^{-1}$ としているので,

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - v = -(v - 9.8) \quad (2)$$

という微分方程式を解けばよい.

(a) t で積分して $v(t)$ を求めなさい. 初期条件は $v(0) = 0$ である.

$$\int \frac{dv}{v-9.8} = -\int dt$$

$$\ln(v-9.8) = -t + C \text{ (積分定数)}$$

$$v-9.8 = ke^{-t} \text{ (} k=e^C \text{ とおいた)}$$

初期条件が
 $v(0) = 9.8 + k = 0$ より $k = -9.8$
 したがって
 $v = 9.8 - 9.8e^{-t}$

(b) 上の解で $t \rightarrow \infty$ の極限をとったときの速さ (終速度) を求めなさい. (動力学 No.5 1.(e) 参照)

$$v = 9.8 - 9.8e^{-t} \rightarrow 9.8 (t \rightarrow \infty)$$

(c) $v = \frac{dx}{dt}$ であることから, もう一度 t で積分して $x(t)$ を求めなさい. 初期条件は $x(0) = 0$ である.

$$x = \int (9.8 - 9.8e^{-t}) dt$$

$$= 9.8t + 9.8e^{-t} + C \text{ (積分定数)}$$

初期条件が
 $x(0) = 9.8 + C = 0$ より $C = -9.8$
 したがって
 $x = 9.8t + 9.8e^{-t} - 9.8$

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)